INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXVI. BAND SECHSTES (SCHLUSS-)HEFT 1958

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 15. Dezember 1958

Postverlagsort Berlin

Preis DM 10,60

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. **R. Grammel**, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. **A. Betz**, Göttingen, Herzberger Landstraße 39A

Professor Dr.-Ing. **K. Klotter**, Stanford (Calif.), 621 Alvarado Row.

Professor Dr. **K. Magnus**, Stuttgart O, Hackländerstraße 33

Professor Dr. **E. Mettler**, Karlsruhe-Durlach, Geigersberger Str. 12

Professor Dr.-Ing. **K. v. Sanden**, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)

Professor Dr.-Ing. **E. Schmidt**, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21

Professor Dr.-Ing. **E. Sörensen**, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Mit der Annahme des Manuskriptes erwirbt der Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder.

Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen vorher an anderer Stelle nicht veröffentlicht sein und auch später nicht anderweitig veröffentlicht werden.

Photographische Vervielfältigungen, Mikrofilme, Mikrophote von ganzen Heften, einzelnen Beiträgen oder Teilen daraus sind ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages nicht gestattet.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg

Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin-Wilmersdorf

Heidelberger Platz 3 / Fernsprecher Sammel-Nr. 83 03 01

Inhalt:

Seite

Paslay, P. R., und *A. Slibar*, Über Querschwingungen von gelenkten Anhängern. Mit 3 Abbildungen 383

Bufler, H., und *H. G. Hahn*, Kritische Drehzahlen und Biegeschwingungen kontinuierlich besetzter Wellen bei verschiedenen Lagerungen. Mit 7 Abbildungen . 387

Zurmühl, R., Berechnung von Biegeschwingungen abgesetzter Wellen mit Zwischenbedingungen mittels Übertragungsmatrizen. Mit 4 Abbildungen 398

Conway, H. D., Some Special Solutions for the Flexural Vibration of Discs of Varying Thickness. 408

Hausenblas, H., Überschallströmung am Austritt von Turbinenschaufel-Kränzen. Mit 3 Abbildungen 411

Trostel, R., Stationäre Wärmespannungen mit temperaturabhängigen Stoffwerten. Mit 8 Abbildungen 416

Withum, D., Die Kreiszylinderschale mit kreisförmigem Ausschnitt unter Schubbeanspruchung. Mit 8 Abbildungen 435

INGENIEUR-ARCHIV

XXVI. BAND | SECHSTES (SCHLUSS-) HEFT | 1958

Über Querschwingungen von gelenkten Anhängern

Von **P. R. Paslay** und **A. Slibar**

1. Einführung. Die Querschwingungen von Kraftwagenanhängern wurden in zwei eingehenden Arbeiten von *H. Ziegler*[1] erstmalig behandelt. Zur Zeit der Durchführung der Untersuchungen von *Ziegler* waren keine eindeutigen experimentellen Aussagen über die von der Straßenoberfläche auf einen Luftreifen übertragenen Kräfte bekannt. Von *Ziegler* wurde daher angenommen, daß die auf den Reifen in einer Normalen zur Radebene wirkenden Kräfte den Gesetzen der trockenen Reibung gehorchen würden. *H. Ziegler* zeigt, daß — unter Einwirkung der angenommenen Reibungskräfte — beim einachsigen Anhänger unter gewissen Verhältnissen diskrete Werte von kritischen Fahrgeschwindigkeiten des Zugfahrzeugs auftreten. Vom schleppenden Fahrzeug wurde dabei angenommen, daß es sich längs einer geraden Fahrbahn bewegt, daß aber kleine Querbewegungen des Zughakens zufolge der Federung des Zugfahrzeugs auftreten können. Weiter ergibt die Rechnung, daß der zweiachsige Anhänger für genügend kleine Fahrgeschwindigkeiten stabil ist und seine Stabilität gegen Querschwingungen im besonderen durch entsprechende Dämpfungsverhältnisse im Zughaken bzw. im Gelenk der Lenkachse verbessert werden kann.

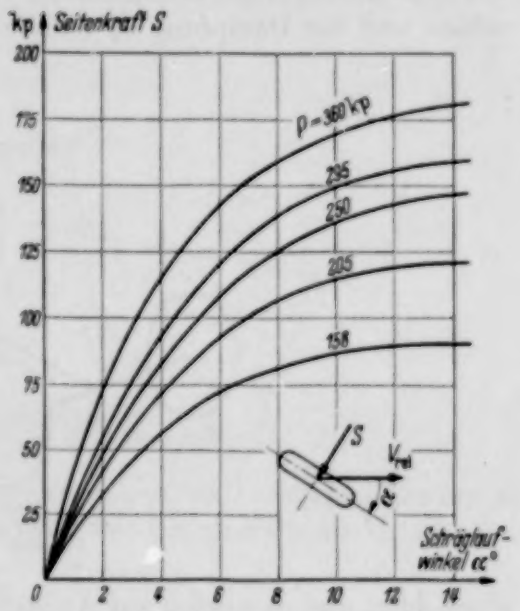


Abb. 1. Die Seitenkraft S als Funktion des Schräglaufwinkels α für verschiedene Werte der Reifenbelastung P.

Später wurde von *L. Huber*[2] in grundlegenden Experimenten über die von der Straßenoberfläche auf die Luftreifen übertragenen Kräfte gezeigt, daß die für die Fahrtrichtungshaltung und Stabilität eines Fahrzeugs wesentlichen Seitenführungskräfte nicht nur von der vom Reifen aufzunehmenden Vertikallast und einem zugehörigen Reibungsbeiwert, sondern wesentlich vom Schräglaufwinkel α des luftbereiften Rades abhängig sind. Dieser Schräglaufwinkel ist definiert als der vom waagrechten Raddurchmesser und dem Vektor der Relativgeschwindigkeit der Radnabe gegen die Straßenoberfläche gebildete Winkel (Abb. 1). *M. Olley*[3] hat in einer späteren Arbeit *Hubers* Ergebnisse bestätigt. *Huber* und *Olley* haben experimentell nachgewiesen, daß ein Luftreifen nur dann eine Seitenkraft überträgt, wenn der Vektor der Geschwindigkeit der Radachse nicht in der Radebene liegt. Diese von der Straßenoberfläche auf den Luftreifen übertragene Seitenkraft S erwies sich als gleichfalls von der aufzunehmenden Vertikallast und der besonderen Ausführungsart eines Reifens abhängig. Abb. 1 zeigt charakteristische Werte der Abhängigkeit von S als Funktion des Schräglaufwinkels α für verschiedene Werte der Normallast P. Mit guter Näherung kann die Unabhängigkeit der Seitenkraft von der Relativgeschwindigkeit des Rades gegenüber der Straßenoberfläche aus den Versuchen gefolgert werden.

Die experimentellen Ergebnisse von *Huber* können dargestellt werden durch

$$S = \mu\, P\, \mathfrak{Tg}\,(C_p\, \alpha)\,, \tag{1}$$

wenn μ einen zwischen Rad und Straßenoberfläche auftretenden Reibungsbeiwert, P die vertikale Last und C_p einen den Reifen kennzeichnenden Druckbeiwert darstellen. Für kleine Werte des Schräglaufwinkels α kann die Gl. (1) mit Benutzung experimentell bestimmbarer Konstanten $\bar{c}$ und c' mit guter Näherung auf die Form

$$S = (\bar{c} - c'\, P)\, P\, \alpha \tag{2}$$

vereinfacht werden.

[1] *H. Ziegler*, Ing.-Arch. 9 (1938) S. 96 und S. 241.
[2] *L. Huber*, Dtsche Kraftfahrtforschung 44 (1940) S. 18.
[3] *M. Olley*, Proc. Inst. Automob. Eng. 41 (1946) S. 147.

Mit Verwendung der Ergebnisse *Hubers* haben *P. Riekert* und *T. E. Schunck*[1] die rechnerische Untersuchung des erforderlichen Lenkwinkels zur vorgeschriebenen Kreisbogenfahrt und der resultierenden Bewegung eines Kraftwagens bei vorgegebenem Lenkwinkel untersucht und die Stabilitätskriterien angegeben. *P. R. Paslay* und *A. Slibar*[2] haben mit Verwendung der Beziehung (1) bzw. der Form (2) die rechnerische Bestimmung des Schwimmwinkels, des Lenkwinkels und des Leistungsverlustes bei Kurvenfahrt eines Kraftwagens ausgeführt und durch Vergleich der errechneten Werte mit den von *O. Dietz* und *R. Harling*[3] durch Versuche gefundenen Werten gute Übereinstimmung von Versuch und Rechnung für Lenk- und Schwimmwinkel zeigen können.

Unter Verwendung der gleichen Gesetze über die wirkenden Seitenkräfte an einem Luftreifen wurde von den Verfassern[4] das Verhalten des einachsigen Anhängers untersucht, wenn der Zughaken durch periodisch in das Zugfahrzeug eingeführte Steuerbewegungen eine Querschwingung ausführt. Es zeigt sich, daß bei Einführung der Seitenkräfte nach den Versuchsergebnissen von *L. Huber* sich keine diskreten Werte für bestimmte kritische Fahrgeschwindigkeiten ergeben, sondern bei festem Wert von Lenkungsfrequenz des Zugfahrzeugs zu einer charakteristischen Frequenz des Anhängers die von den Radseitenkräften gelieferte Dämpfung der Vorwärtsgeschwindigkeit des Anhängers umgekehrt proportional ist.

2. Die Bewegungsgleichungen. Ein Zugfahrzeug mit Anhänger besitzt viele Freiheitsgrade, und eine große Anzahl von Parametern wird das Verhalten eines solchen Systems gegen Quer- und Vertikalschwingungen beeinflussen. Um die charakteristische Abhängigkeit der Eigenschwingungszahlen und der Dämpfung zu erhalten, wird der Anhänger auf das in Abb. 2 dargestellte System

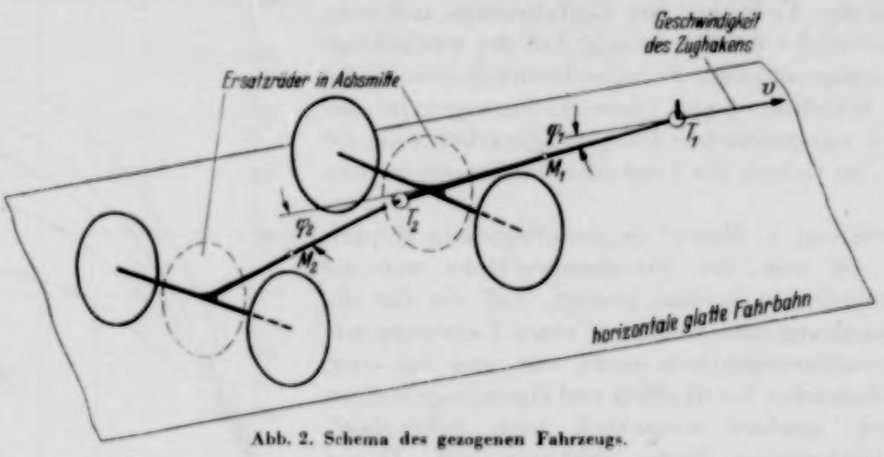


Abb. 2. Schema des gezogenen Fahrzeugs.

abgebildet, und es werden zur Aufstellung der Bewegungsgleichungen die Einzelräder durch mittig angebrachte Ersatzräder dargestellt. Abb. 3a zeigt die am Modell verwendeten Symbole, Abb. 3b das Schema des Lenk- bzw. Lastteiles mit den wirkenden Kräften. Die Behandlung wird für kleine Amplituden der Querbewegung ausgeführt und die Zuggeschwindigkeit konstant angesehen.[5] Da die Straße glatt und eben angenommen wird, kann der Einfluß der Federung sowohl des Zugfahrzeugs als auch des Anhängers vernachlässigt werden, und der Ersatz der beiden Einzelräder jeder Achse durch ein mittig angebrachtes Ersatzrad ist zulässig. Die bei den Querschwingungen auftretenden Kreiselmomente an den Rädern, der Rollwiderstand und das in der Reifenauflage wirkende Schräglaufmoment[6] können bei kleinen Ausschlägen vernachlässigt werden.

Damit ergeben sich für den Lenkteil die Bewegungsgleichungen

$$\left.\begin{aligned} 0 &= X - S_1 \varphi_1 - \bar{X}\,, \\ m_1 c_1 \ddot{\varphi}_1 &= Y - S_1 - \bar{Y}\,, \\ I_1 \ddot{\varphi}_1 &= -c_1\, Y - c_1\, X \varphi_1 - S_1 (a - c_1) - \bar{Y}\,(l_1 - c_1) - \bar{X}\,(l_1 - c_1)\,\varphi_1\,, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

[1] *P. Riekert* und *T. E. Schunck*, Ing.-Arch. 9 (1940) S. 210.
[2] *P. R. Paslay* und *A. Slibar*, Ing.-Arch. 24 (1956) S. 412.
[3] *O. Dietz* und *R. Harling*, Dtsche Kraftfahrtforschung 44 (1940).
[4] *A. Slibar* und *P. R. Paslay*, Journ. Appl. Mech. 24 (1957) S. 515.
[5] Mit der Annahme der konstanten Zuggeschwindigkeit wird — um auswertbare Rechenergebnisse zu erhalten — bewußt auf die Rückwirkung der Anhängerbewegung auf die Bewegung des Zugfahrzeugs verzichtet. Die Berücksichtigung aller möglichen Freiheitsgrade des Zugfahrzeugs (siehe *H. Ziegler*, Fußnote 1, S. 383) führt bei Benutzung der effektiven Reibungsgesetze des Luftreifens auf ein der Rechnung kaum zugängliches Gleichungssystem. Die vorliegende Rechnung wird aber besonders für die häufige Kombination eines schweren Zugfahrzeugs mit leichtem Anhänger gut brauchbare Ergebnisse liefern.
[6] Siehe z. B. *E. Fiala*, Z. VDI 96 (1954) S. 973.

wenn X, $\bar{X}$, Y, $\bar{Y}$ die in den Gelenkpunkten auf die Teile des Anhängers übertragenen Kräfte, S_1 die auf das vordere Ersatzrad wirkende Seitenkraft, φ_1 den Querausschlag der Längsachse des Anhängervorderteils, m_1 die Masse und I_1 das Massenträgheitsmoment um die Hochachse durch den Schwerpunkt des Lenkteils bedeuten. Die Bedeutungen der Längen a, c_1 und l_1 gehen aus Abb. 3a hervor.

Für den Lastteil des Anhängers folgen die Bewegungsgleichungen

$$0 = \bar{X} - S_2 \varphi_2 , \qquad m_2 (l_1 \ddot{\varphi}_1 + c_2 \ddot{\varphi}_2) = \bar{Y} - S_2 , \qquad I_2 \ddot{\varphi}_2 = - c_2 \bar{Y} - c_2 \bar{X} \varphi_2 - S_2 (l_2 - c_2) , \quad (4)$$

wenn S_2 die auf das hintere Ersatzrad übertragene Seitenkraft, φ_2 den Querausschlag der Längsachse des Anhängerteils, m_2 und I_2 dessen Masse bzw. Massenträgheitsmoment um die Hochachse durch den Schwerpunkt bedeuten. Die Bezeichnungen c_2 und l_2 sind in Abb. 3a eingezeichnet.

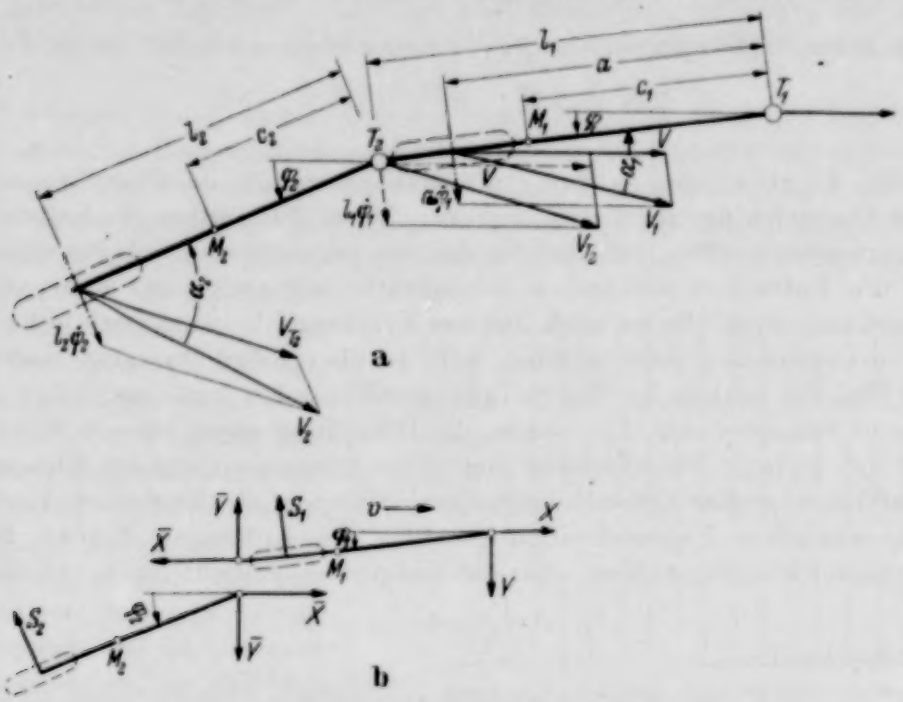


Abb. 3. a) Geometrie und Geschwindigkeiten am Anhängermodell.
b) Wirkende Kräfte auf Lenk- bzw. Lastteil des Anhängermodells.

Bezeichnen wir mit v die konstante Fahrgeschwindigkeit des Zugfahrzeugs, so ergeben sich aus der Geometrie des Systems nach Abb. 3a für kleine Schräglaufwinkel der Ersatzräder die Beziehungen

$$\alpha_1 = \frac{a \dot{\varphi}_1 + v \varphi_1}{v} , \qquad \alpha_2 = \frac{l_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 + v \varphi_2}{v} . \quad (5)$$

Eliminiert man die im Zughaken T_1 und im Gelenk T_2 wirkenden Kräfte, so folgt

$$\left.\begin{aligned} (I_1 + m_1 c_1^2 + m_2 l_1^2) \ddot{\varphi}_1 + (m_2 c_2 l_1) \ddot{\varphi}_2 + a S_1 + l_1 S_2 = 0 , \\ (l_1 c_2 m_2) \ddot{\varphi}_1 + (I_2 + m_2 c_2^2) \ddot{\varphi}_2 + S_2 l_2 = 0 . \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Sind P_1 und P_2 die auf den Ersatzrädern wirkenden vertikalen Lasten, so liefert die Gl. (2) mit Benützung von (5) für die Seitenkräfte

$$S_1 = (\bar{c} - c' P_1) P_1 \frac{a \dot{\varphi}_1 + v \varphi_1}{v} , \qquad S_2 = (\bar{c} - c' P_2) P_2 \frac{l_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 + v \varphi_2}{v} , \quad (7)$$

und damit folgen für die Beschreibung der resultierenden Querschwingung die beiden simultanen Differentialgleichungen

$$\left.\begin{aligned} k_1 \ddot{\varphi}_1 + k_2 \ddot{\varphi}_2 + k_3 \dot{\varphi}_1 + k_4 \dot{\varphi}_2 + k_5 \varphi_1 + k_6 \varphi_2 = 0 , \\ k_2 \ddot{\varphi}_1 + k_7 \ddot{\varphi}_2 + k_4 \dot{\varphi}_1 + k_8 \dot{\varphi}_2 + k_9 \varphi_2 = 0 , \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

in welchen die Koeffizienten $k_1, k_2, \ldots . k_9$ die Bedeutungen

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= I_1 + m_1 c_1^2 + m_2 l_1^2 , & k_6 &= (\bar{c} - c' P_2) P_2 l_1 , \\ k_2 &= m_2 c_2 l_1 , & k_7 &= I_2 + m_2 c_2^2 , \\ k_3 &= (\bar{c} - c' P_1) P_1 \frac{a^2}{v} + (\bar{c} - c' P_2) P_2 \frac{l_1^2}{v} , & k_8 &= (\bar{c} - c' P_2) P_2 \frac{l_2^2}{v} , \\ k_4 &= (\bar{c} - c' P_2) P_2 \frac{l_1 l_2}{v} , & k_9 &= (\bar{c} - c' P_2) P_2 l_2 \\ k_5 &= (\bar{c} - c' P_1) P_1 a , \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

haben.

Führt man in die Bewegungsgleichungen (8) den Lösungsansatz

$$\varphi_1 = A\, e^{\beta t}\,, \qquad \varphi_2 = B\, e^{\beta t} \tag{10}$$

ein, so folgt

$$\begin{pmatrix} (k_1\beta^2 + k_3\beta + k_5) & (k_2\beta^2 + k_4\beta + k_6) \\ (k_2\beta^2 + k_4\beta) & (k_7\beta^2 + k_8\beta + k_9) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = 0\,, \tag{11}$$

und die Säkulargleichung vierter Ordnung zur Bestimmung der Eigenfrequenzen wird

$$\begin{aligned}(k_1 k_7 - k_2^2)\,\beta^4 + (k_1 k_8 + k_3 k_7 - 2\,k_2 k_4)\,\beta^3 + (k_1 k_9 + k_3 k_8 + k_5 k_7 + k_2 k_6 + k_4^2)\,\beta^2 \\ + (k_3 k_9 + k_5 k_8 - k_4 k_6)\,\beta + k_5 k_9 = 0\,.\end{aligned} \tag{12}$$

Mit den offensichtlichen Bedeutungen von p, q, r und t können wir (12) in der Form

$$p\,\beta^4 + q\,\beta^3 + r\,\beta^2 + s\,\beta + t = 0 \tag{12a}$$

schreiben.

3. Folgerungen. In (12a) sind q und s die Maßzahlen für die Dämpfungseigenschaften des Anhängers gegen Querschwingungen. Entsprechend dem bekannten Verhalten des einachsigen Anhängers[1] kann erwartet werden, daß auch für das System mit zwei Freiheitsgraden der dämpfende Einfluß der auf die Luftreifen wirkenden Seitenkräfte mit steigender Fahrgeschwindigkeit des Zugfahrzeugs abnehmen wird. Es ist auch aus der Erfahrung bekannt, daß hohe Werte der Fahrgeschwindigkeit zu kritischen Fahrzuständen, d. h. zu übergroßen Queramplituden des Anhängers führen können[2]. Für die praktische Beurteilung werden daher jene aus (12a) folgenden Eigenkreisfrequenzen von Interesse sein, für welche die Dämpfung einen kleinen Wert annimmt. Vernachlässigt man die geringe Verschiebung der Eigenfrequenzen zufolge kleiner Dämpfung, so müssen beim Auftreten großer Querschwingungsamplituden die kritischen Lenkungsfrequenzen nahe an den ungedämpften Eigenschwingungszahlen des Anhängers liegen. Bezeichnet ω die ungedämpften Eigenschwingungszahlen, also die imaginären Anteile von β, so liefert die Beziehung

$$p\,\omega^4 - r\,\omega^2 + t = 0\,, \tag{13}$$

für diese Größen die Ausdrücke

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{r}{2p} \pm \frac{r}{2p}\sqrt{1 - \frac{4pt}{r^2}}\,, \tag{14}$$

wenn die Beiwerte p, r und t in den ursprünglichen Parametern des Systems geschrieben die Bedeutungen

$$\left.\begin{aligned} p &= (I_1 + m_1 c_1^2 + m_2 l_1^2)\,(I_2 + m_2 c_2^2) - (m_2 c_2 l_1)^2\,, \\ r &= (I_1 + m_1 c_1^2 + m_2 l_1^2)\,(\bar{c} - c'\,P_2)\,P_2 l_2 \\ &\quad + \left[(\bar{c} - c'\,P_1)\,P_1 \frac{a^2}{v} + (\bar{c} + c'\,P_2)\,P_2 \frac{l_1^2}{v}\right]\cdot(\bar{c} - c'\,P_2)\,P_2 \frac{l_2^2}{v} + (\bar{c} - c'\,P_1)\,P_1 a\,(I_2 + m_2 c_2^2) \\ &\quad + m_2 c_2 l_1\,(\bar{c} - c'\,P_2)\,P_2 l_1 + \left[(\bar{c} - c'\,P_2)\,P_2 \frac{l_1 l_2}{v}\right]^2\,, \\ t &= (\bar{c} - c'\,P_1)\,P_1 a\,(\bar{c} - c'\,P_2)\,P_2 l_2 \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

haben.

Die in (14) angegebenen Werte der Eigenkreisfrequenzen sollten bei zweiachsigen Anhängern der behandelten Art beachtet werden, um im Bereich der zu erwartenden Fahrzustände die Querschwingungsamplituden in zulässigen Schranken zu halten.

4. Zusammenfassung. Für die Querschwingungen eines gelenkten Anhängers werden die beiden ungedämpften Eigenschwingungszahlen und ein Verfahren zur Bestimmung des Einflusses der Dämpfung angegeben. Bei geradliniger Bewegung des Zughakens wird ein vereinfachtes Anhängermodell betrachtet. Die von *L. Huber* auf Grund von Versuchen angegebenen Ausdrücke für die auf einen Luftreifen wirkenden Seitenkräfte werden verwendet. Zur Bestimmung der beiden ungedämpften Eigenschwingungszahlen werden kleine Querschwingungsamplituden betrachtet.

(Eingegangen am 11. Januar 1958.)

Anschrift der Verfasser: *P. R. Paslay*, General Electric Company, Schenectady, N. Y., USA.
A. Slibar, Professor an der Techn. Hochschule Stuttgart, Stuttgart, Keplerstr. 10.

[1] Siehe Fußnote 4 von Seite 384.
[2] *D. Williams*, Proc. Inst. Mech. Eng., Autom. Div., 1951—52, S. 175.

Kritische Drehzahlen und Biegeschwingungen kontinuierlich besetzter Wellen bei verschiedenen Lagerungen*

Von **H. Bufler** und **H. G. Hahn**

1. Einleitung. Kritische Drehzahlen von Rotoren sind wegen ihrer technischen Bedeutung der Gegenstand zahlreicher Arbeiten[1]. Es liegt eine Reihe von Lösungen für verschiedene Besetzungen der Wellen vor, wobei im allgemeinen eine zweifache kugelige Lagerung zugrundegelegt wird.

Nachstehende Untersuchung bezieht sich auf den Spezialfall einer gleichmäßig kontinuierlich besetzten Welle konstanter Biegesteifigkeit, für die im Fall der Rotation die kritischen Drehzahlen des synchronen Gleich- und Gegenlaufs, im Fall der reinen Biegeschwingungen die Eigenfrequenzen berechnet werden (denn in beiden Fällen liegt dieselbe Differentialgleichung vor) und zwar für verschiedene Randbedingungen. Mit dem Ziel, den Einfluß der Trägheitsmomente auf die kritischen Drehzahlen und Biegeschwingungseigenfrequenzen bei den einzelnen Lagerungsarten beurteilen zu können, wurde schon in einem früheren Aufsatz der Verfasser[2] dasselbe Problem behandelt, wobei man sich allerdings auf die jeweilige Grundfrequenz beschränkte. Die hier vorliegende Arbeit beinhaltet die vollständigen Ergebnisse bis einschließlich der dritten Oberfrequenz und gibt Näherungsformeln für die weiteren (höheren) Frequenzen an, so daß das gesamte Frequenzspektrum erfaßt wird.

Folgende Lagerungsarten werden diskutiert (Abb. 1):

a) Fall I: Ein Wellenende „eingespannt", das andere frei (fliegende Lagerung),
b) Fall II: Beide Wellenenden kugelig gelagert,
c) Fall III: Ein Wellenende eingespannt, das andere kugelig gelagert,
d) Fall IV: Beide Wellenenden eingespannt.

Unter „eingespannt" versteht man hierbei, daß die Welle zwar die Möglichkeit hat, zu rotieren, sich aber im betreffenden Lager nicht senkrecht zu ihrer Achse verdrehen kann.

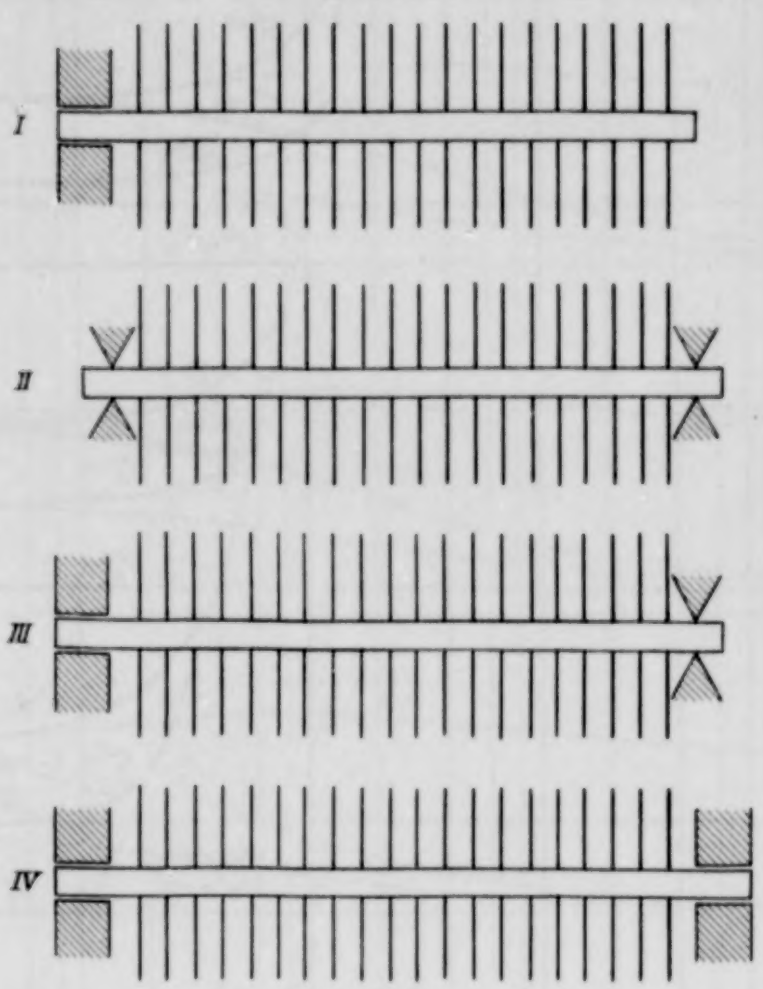


Abb. 1. Die untersuchten Lagerungsarten I bis IV.

2. Rechnung und Diskussion. Die hier benötigten Formeln können z. T. direkt aus unserer früheren Arbeit[2] entnommen werden. Die eingeklammerten Zahlen vor den Formeln weisen auf die dort verwendete Numerierung hin.

Es bedeuten l die Länge, E den Elastizitätsmodul, J das axiale Flächenträgheitsmoment der Welle, $\overline{m}$ die Masse je Längeneinheit der besetzten Welle, $\overline{\Theta}$ das axiale Massenträgheitsmoment

* Vorliegende Arbeit entstand auf Anregung von Prof. Dr. *H. Neuber*, Lehrstuhl für Technische Mechanik der Technischen Hochschule München.

[1] *K. Karas*, Die kritischen Drehzahlen wichtiger Rotorformen, Wien 1935.

[2] *H. Bufler* und *H. G. Hahn*, Forsch. a. d. Geb. d. Ing. Wes., 23 (1957), S. 22.

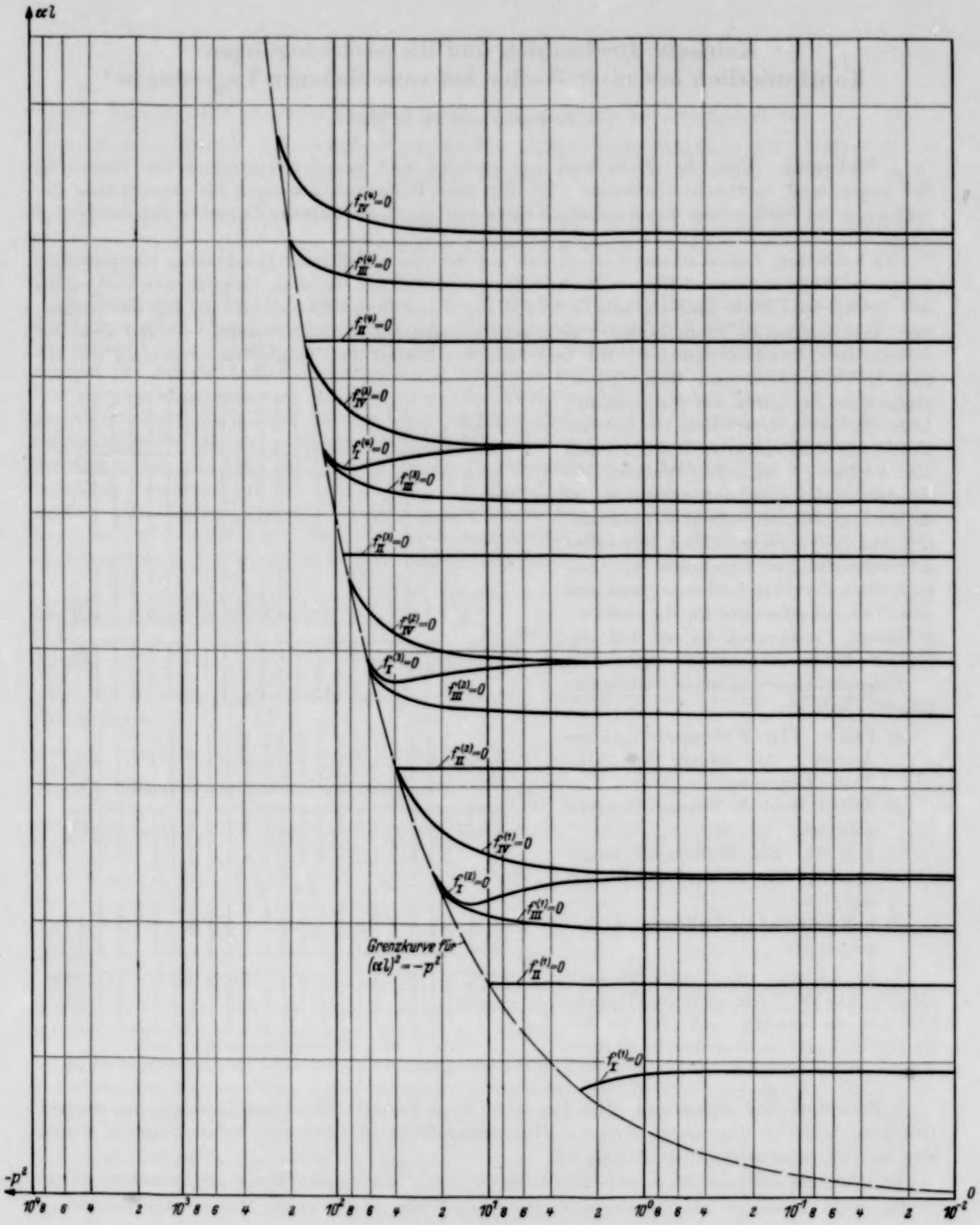
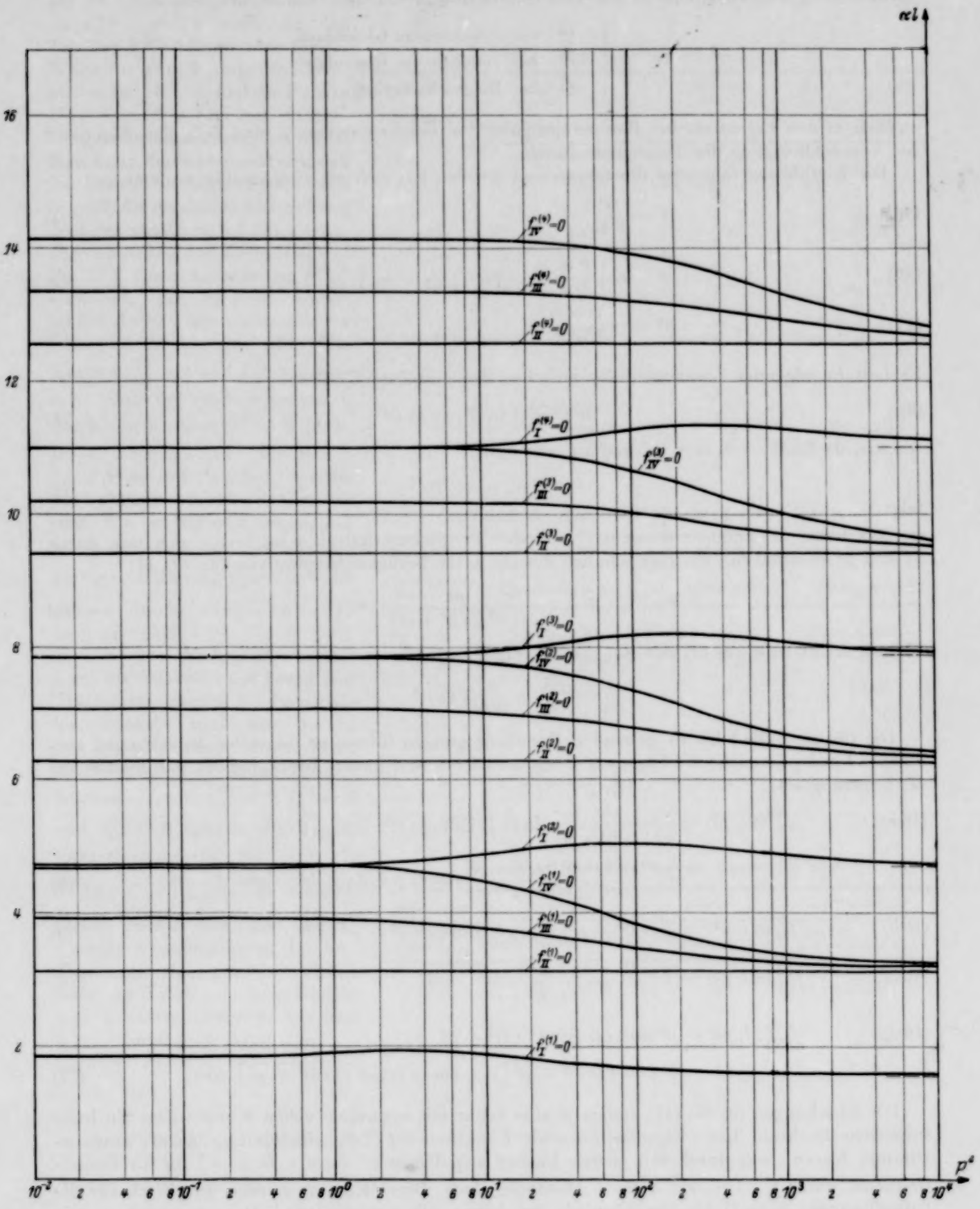


Abb. 2. Darstellung der Funktionen $f_{\mathrm{I}}^{(\nu)}(\alpha l, p^2)=0$ bis $f_{\mathrm{IV}}^{(\nu)}(\alpha l, p^2)=0$ für $\nu=1$ bis $\nu=4$.


αl
16
14
12
10
8
6
4
2
$f_{IV}^{(4)}=0$
$f_{III}^{(4)}=0$
$f_{II}^{(4)}=0$
$f_{I}^{(4)}=0$
$f_{IV}^{(3)}=0$
$f_{III}^{(3)}=0$
$f_{II}^{(3)}=0$
$f_{I}^{(3)}=0$
$f_{IV}^{(2)}=0$
$f_{III}^{(2)}=0$
$f_{II}^{(2)}=0$
$f_{I}^{(2)}=0$
$f_{IV}^{(1)}=0$
$f_{III}^{(1)}=0$
$f_{II}^{(1)}=0$
$f_{I}^{(1)}=0$
10^{-2} 2 4 6 8 10^{-1} 2 4 6 8 10^{0} 2 4 6 8 10^{1} 2 4 6 8 10^{2} 2 4 6 8 10^{3} 2 4 6 8 10^{4}
p^4

je Längeneinheit der besetzten Welle, ω die Kreisfrequenz bei Berücksichtigung der Trägheitsmomente, ω_0 die Kreisfrequenz bei Vernachlässigung der Trägheitsmomente, ferner

$$\Theta^* = \begin{cases} -\bar{\Theta} & \text{bei synchronem Gleichlauf,} \\ 3\,\bar{\Theta} & \text{bei synchronem Gegenlauf,} \\ \bar{\Theta} & \text{bei Biegeschwingung,} \end{cases}$$

endlich αl den Eigenwert bei Berücksichtigung der Trägheitsmomente und $(\alpha l)_0$ den Eigenwert bei Vernachlässigung der Trägheitsmomente.

Die Einführung folgender dimensionsloser Größen hat sich als zweckmäßig erwiesen:

(9)
$$V = \frac{\Theta^*}{l^2\,\bar{m}}, \tag{1}$$

(10)
$$\bar{\omega} = \omega \sqrt{\frac{l^4\,\bar{m}}{E\,J}} \qquad \left(\text{bzw. } \bar{\omega}_0 = \omega_0 \sqrt{\frac{l^4\,\bar{m}}{E\,J}}\right), \tag{2}$$

(11)
$$p^2 = -\frac{l^2\,\omega^2\,\Theta^*}{E\,J}. \tag{3}$$

Es besteht folgender Zusammenhang zwischen den einzelnen Größen:

(8)
$$\bar{\omega}^2\,[1 + V(\alpha\,l)^2] = (\alpha\,l)^4, \tag{4}$$

woraus, da für $V = 0$, $\omega = \omega_0$ und $\alpha\,l = (\alpha\,l)_0$ ist,

$$\bar{\omega}_0 = (\alpha\,l)_0^2 \tag{5}$$

folgt.

Das bezogene Trägheitsmoment V und das Frequenzverhältnis ω/ω_0 lassen sich nun durch αl und p^2 ausdrücken. Es folgt nämlich aus (4) unter Berücksichtigung von (3), (2), (1)

$$V = -\frac{p^2}{(\alpha\,l)^2\,[(\alpha\,l)^2 + p^2]}. \tag{6}$$

Ebenso erhält man aus (3) mit (6), (5), (2), (1)

$$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\bar{\omega}}{\bar{\omega}_0} = \frac{\alpha\,l}{(\alpha\,l)_0^2}\sqrt{(\alpha\,l)^2 + p^2}. \tag{7}$$

Die für die Fälle I bis IV geltenden Randbedingungen führen zu folgenden Beziehungen zwischen $\alpha\,l$ und p^2, welche die Eigenwerte repräsentieren (der untere Index bezieht sich hierbei auf die Lagerungsart):

(16a)
$$f_{\mathrm{I}}^{(\nu)}(\alpha\,l, p^2) \equiv \frac{p^2}{\alpha\,l\sqrt{(\alpha\,l)^2 + p^2}} \sin(\alpha\,l)\,\mathfrak{Sin}\sqrt{(\alpha\,l)^2 + p^2} + \frac{p^4 + 2\,(\alpha\,l)^2\,[(\alpha\,l)^2 + p^2]}{(\alpha\,l)^2\,[(\alpha\,l)^2 + p^2]} \cos(\alpha\,l)\,\mathfrak{Cof}\sqrt{(\alpha\,l)^2 + p^2} + 2 = 0, \tag{8}$$

(16b)
$$f_{\mathrm{II}}^{(\nu)}(\alpha\,l, p^2) \equiv [2(\alpha\,l)^2 + p^2] \sin(\alpha\,l)\,\mathfrak{Sin}\sqrt{(\alpha\,l)^2 + p^2} = 0, \tag{9}$$

(16c)
$$f_{\mathrm{III}}^{(\nu)}(\alpha\,l, p^2) \equiv \frac{\operatorname{tg}(\alpha\,l)}{\alpha\,l} - \frac{\mathfrak{Tg}\sqrt{(\alpha\,l)^2 + p^2}}{\sqrt{(\alpha\,l)^2 + p^2}} = 0, \tag{10}$$

(16d)
$$f_{\mathrm{IV}}^{(\nu)}(\alpha\,l, p^2) \equiv p^2 \sin(\alpha\,l)\,\mathfrak{Sin}\sqrt{(\alpha\,l)^2 + p^2} + 2\,\alpha\,l\sqrt{(\alpha\,l)^2 + p^2}\,[1 - \cos(\alpha\,l)\,\mathfrak{Cof}\sqrt{(\alpha\,l)^2 + p^2}] = 0. \tag{11}$$

Die Gleichungen (8) bis (11) stellen je eine Schar mit unendlich vielen Kurven dar. Zu jeder kritischen Drehzahl bzw. Eigenfrequenz als Funktion der Trägheitsmomente gehört eine bestimmte Kurve[1], was durch den oberen Index ν angedeutet sei (also z. B. $\nu = 1$ für die Grundfrequenz, wofür $f_{\mathrm{I}}^{(1)} = 0$, $f_{\mathrm{II}}^{(1)} = 0$ ... zuständig sind). Diese Kurven wurden numerisch für die Grundfrequenz ($\nu = 1$) bis einschließlich der dritten Oberfrequenz ($\nu = 4$) ausgewertet und in Abb. 2 dargestellt, wobei sich die verwendete logarithmische Auftragung als zweckmäßig erwies.

[1] Streng genommen sind es je zwei Kurven, die zur p^2-Achse spiegelbildlich liegen und beide zum selben Ergebnis führen.

Zu ihrer Diskussion seien einige Bemerkungen gemacht. Für $p^2 = \infty$ haben sämtliche Kurven zur p^2-Achse parallele Geraden als Asymptoten, für $p^2 < 0$ sind die Kurven nur im Bereich $-(\alpha l)^2 \leqq p^2 \leqq 0$ reell. In den Tabellen 1 bis 3 findet man die αl-Werte für $p^2 = 0$ sowie die Asymptoten für $p^2 = \infty$ und die Punkte $p^2 = -(\alpha l)^2$ nebst den dazugehörigen Bestimmungsgleichungen. Man kann daraus entnehmen, daß im Bereich höherer Frequenzen (ν groß) die maximale Abweichung $\Delta\alpha l$ der einzelnen αl bei zweifacher Lagerung der Welle (Fälle II bis IV) einen konstanten Wert annimmt, der relative Unterschied $\Delta\alpha l/\alpha l$ mit wachsendem ν immer mehr verschwindet. Die Kurven $f_{III}^{(\nu)} = 0$ und $f_{IV}^{(\nu)} = 0$ können daher für große ν praktisch durch die Kurven $f_{II}^{(\nu)} = 0$ (d. h. $\sin(\alpha l) = 0$ bzw. $\alpha l = \nu\pi$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) ersetzt werden, welche zur p^2-Achse parallele Geraden sind. Ebenso läßt sich zeigen, daß für große ν die Kurven $f_{I}^{(\nu)} = 0$, die für die einseitig eingespannte Welle gelten, durch $\alpha l = \frac{\pi}{2}(2\nu - 1)$ ersetzbar sind.

Um das Frequenzverhältnis ω/ω_0 als Funktion des bezogenen Trägheitsmomentes V darzustellen, braucht man nur die in der αl-p^2-Ebene dargestellten, die Eigenwerte beinhaltenden Kurven $f_{I}^{(\nu)} = 0$, $f_{II}^{(\nu)} = 0$, $f_{III}^{(\nu)} = 0$ und $f_{IV}^{(\nu)} = 0$ mittels der Transformationsformeln (6) und (7) in die $\left(\frac{\omega}{\omega_0}, V\right)$-Ebene abzubilden. Dabei entsprechen sich die in Tabelle 4 aufgeführten Punkte. Man entnimmt aus der letzten Zeile der Tabelle die dem Gleichlauf gesetzten Grenzen. Da hier $V = -\bar{\Theta}/l^2\bar{m}$ ist, folgt, daß im Fall I für

$$\frac{\bar{\Theta}}{l^2\bar{m}} > \frac{4}{\pi^2(2\nu-1)^2},$$

in den Fällen II, III, IV für

$$\frac{\bar{\Theta}}{l^2\bar{m}} > \frac{1}{\nu^2\pi^2}$$

kein synchroner Gleichlauf möglich ist. Bei einer zweifach gelagerten Welle ist die Grenze dafür somit unabhängig von der Art der Lagerung. Auf diese Tatsache hat bereits *Grammel*[1] hingewiesen.

Tabelle 1. *Spezielle Werte der Kurven* $f_{I}^{(\nu)} = 0$.

Bedingungen	$p^2 = 0$	$p^2 \to \infty$	$p^2 = p^{*2} = -(\alpha l)^2$
Bedingungsgleichungen	$\cos(\alpha l)\,\mathfrak{Cof}(\alpha l) + 1 = 0$	$\cos(\alpha l) = 0$	$\cos(\alpha l) = 0$
$\nu = 1$	$\alpha l = 1{,}875$	$\alpha l = \frac{\pi}{2}$	$\alpha l = \frac{\pi}{2}$
2	4,694	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$
3	7,855	$\frac{5}{2}\pi$	$\frac{5}{2}\pi$
4	10,996	$\frac{7}{2}\pi$	$\frac{7}{2}\pi$
n	$\approx\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi$	$\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi$	$\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi$

Tabelle 2. *Spezielle Werte der Kurven* $f_{III}^{(\nu)} = 0$.

Bedingungen	$p^2 = 0$	$p^2 \to \infty$	$p^2 = p^{*2} = -(\alpha l)^2$
Bedingungsgleichungen	$\mathfrak{Tg}(\alpha l) - \mathrm{tg}(\alpha l) = 0$	$\mathrm{tg}(\alpha l) = 0$	$\mathrm{tg}(\alpha l) - \alpha l = 0$
$\nu = 1$	$\alpha l = 3{,}927$	$\alpha l = \pi$	$\alpha l = 4{,}493$
2	7,069	2π	7,724
3	10,210	3π	10,905
4	13,352	4π	14,064
n	$\approx\left(n+\frac{1}{4}\right)\pi$	$n\pi$	$\approx\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$

Tabelle 3. *Spezielle Werte der Kurven* $f_{IV}^{(\nu)} = 0$.

Bedingungen	$p^2 = 0$	$p^2 \to \infty$	$p^2 = p^{*2} = -(\alpha l)^2$
Bedingungsgleichungen	$\mathfrak{Cof}(\alpha l)\cos(\alpha l) - 1 = 0$	$\mathrm{tg}(\alpha l) = 0$	$\alpha l \cdot \sin(\alpha l) + 2\cos(\alpha l) - 2 = 0$
$\nu = 1$	$\alpha l = 4{,}730$	$\alpha l = \pi$	$\alpha l = 6{,}284$
2	7,853	2π	8,991
3	10,996	3π	12,568
4	14,137	4π	15,453
n	$\approx\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi$	$n\pi$	$\approx (n+1)\pi$

[1] *C. B. Biezeno* und *R. Grammel*, Technische Dynamik, 2. Bd. S. 201 u. 202, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.

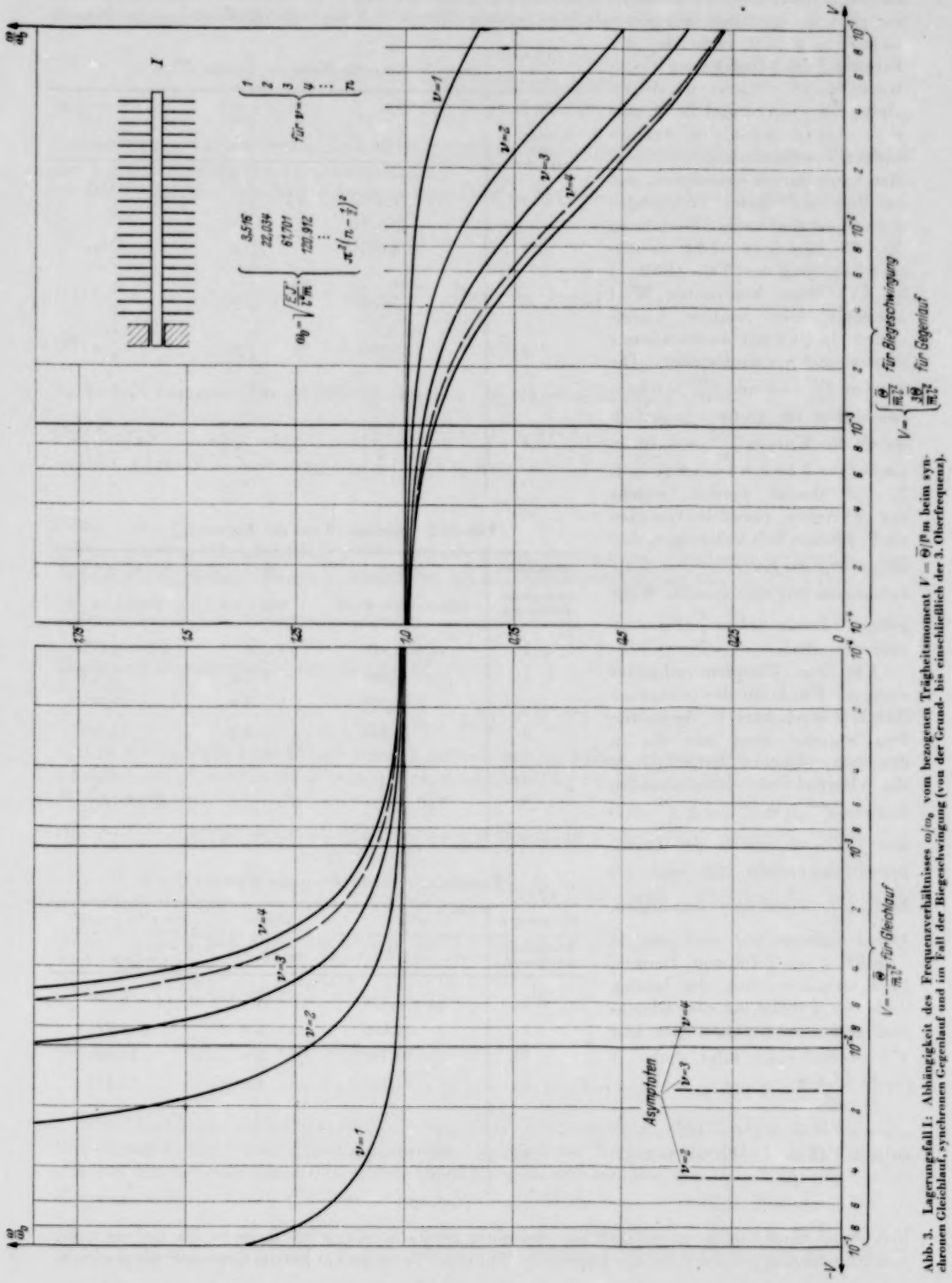


Abb. 3. Lagerungsfall I: Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses ω/ω_0 vom bezogenen Trägheitsmoment $V = \bar{\Theta}/\rho m$ beim synchronen Gleichlauf, synchronen Gegenlauf und im Fall der Biegeschwingung (von der Grund- bis einschließlich der 3. Oberfrequenz).

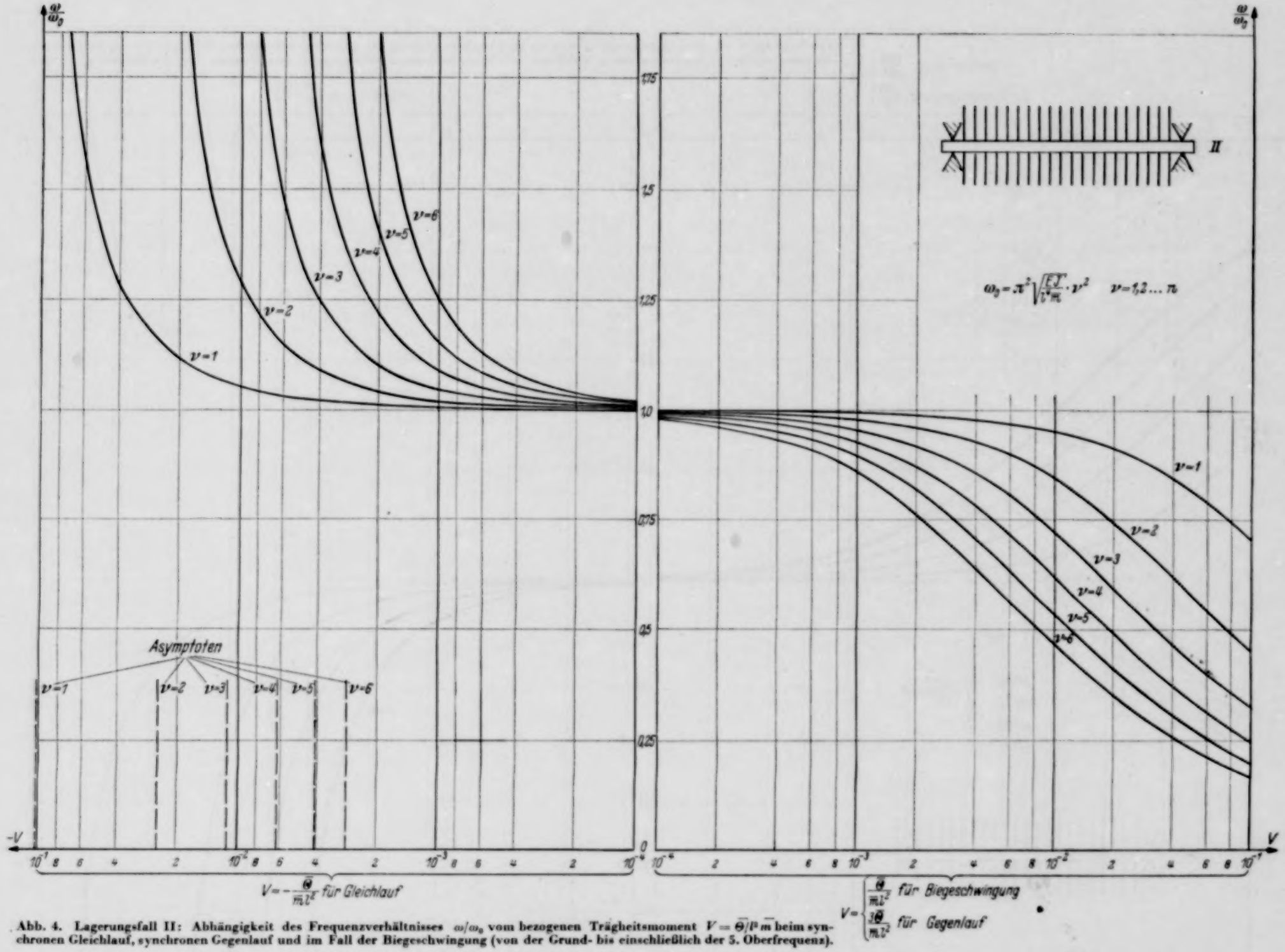


Abb. 4. Lagerungsfall II: Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses ω/ω_0 vom bezogenen Trägheitsmoment $V = \Theta/l^3 m$ beim synchronen Gleichlauf, synchronen Gegenlauf und im Fall der Biegeschwingung (von der Grund- bis einschließlich der 5. Oberfrequenz).

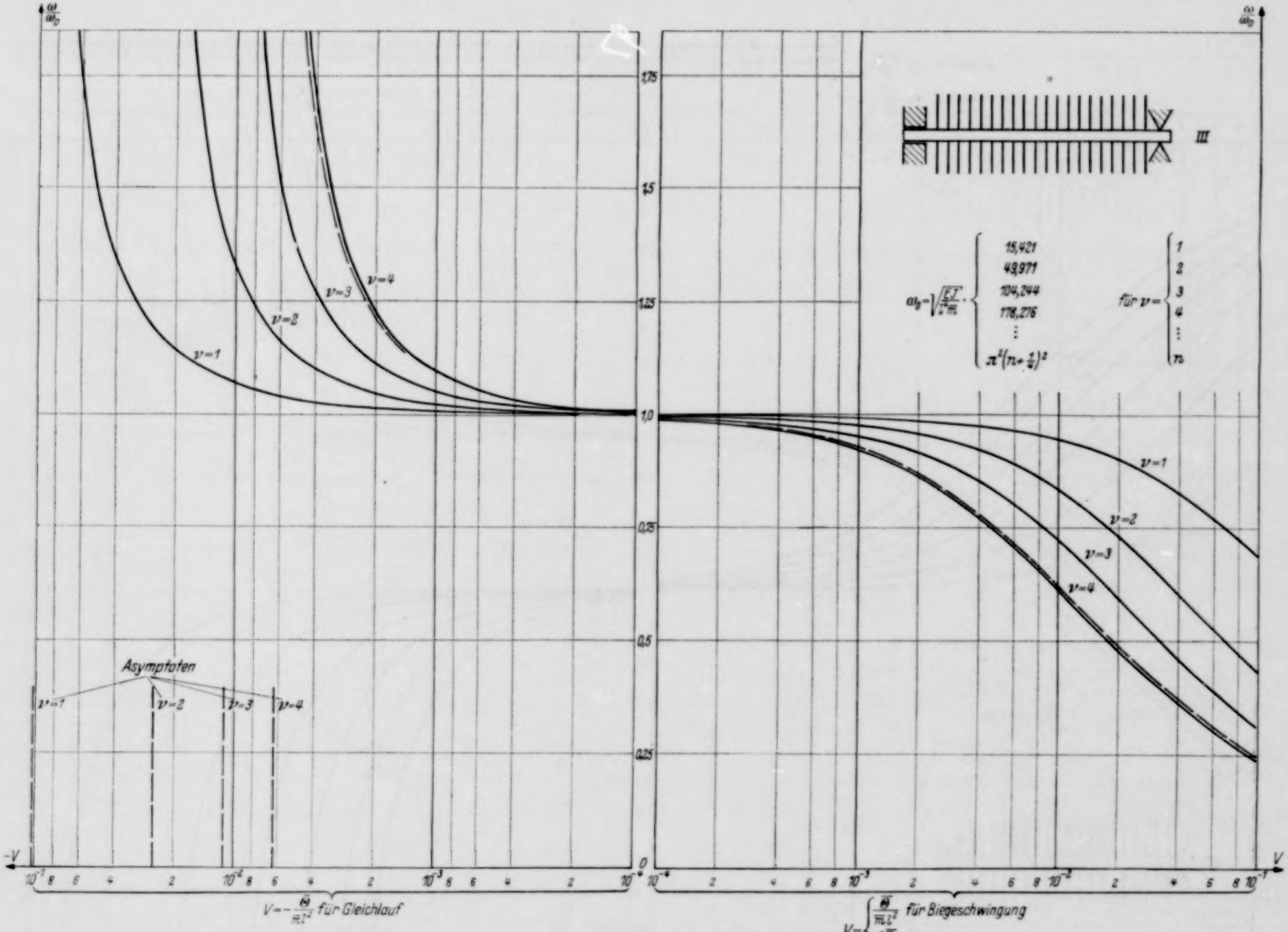


Abb. 5. Lagerungsfall III: Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses ω/ω_0 vom bezogenen Trägheitsmoment $V = \bar{\Theta}/l^3\bar{m}$ beim synchronen Gleichlauf, synchronen Gegenlauf und im Fall der Biegeschwingung (von der Grund- bis einschließlich der 3. Oberfrequenz).

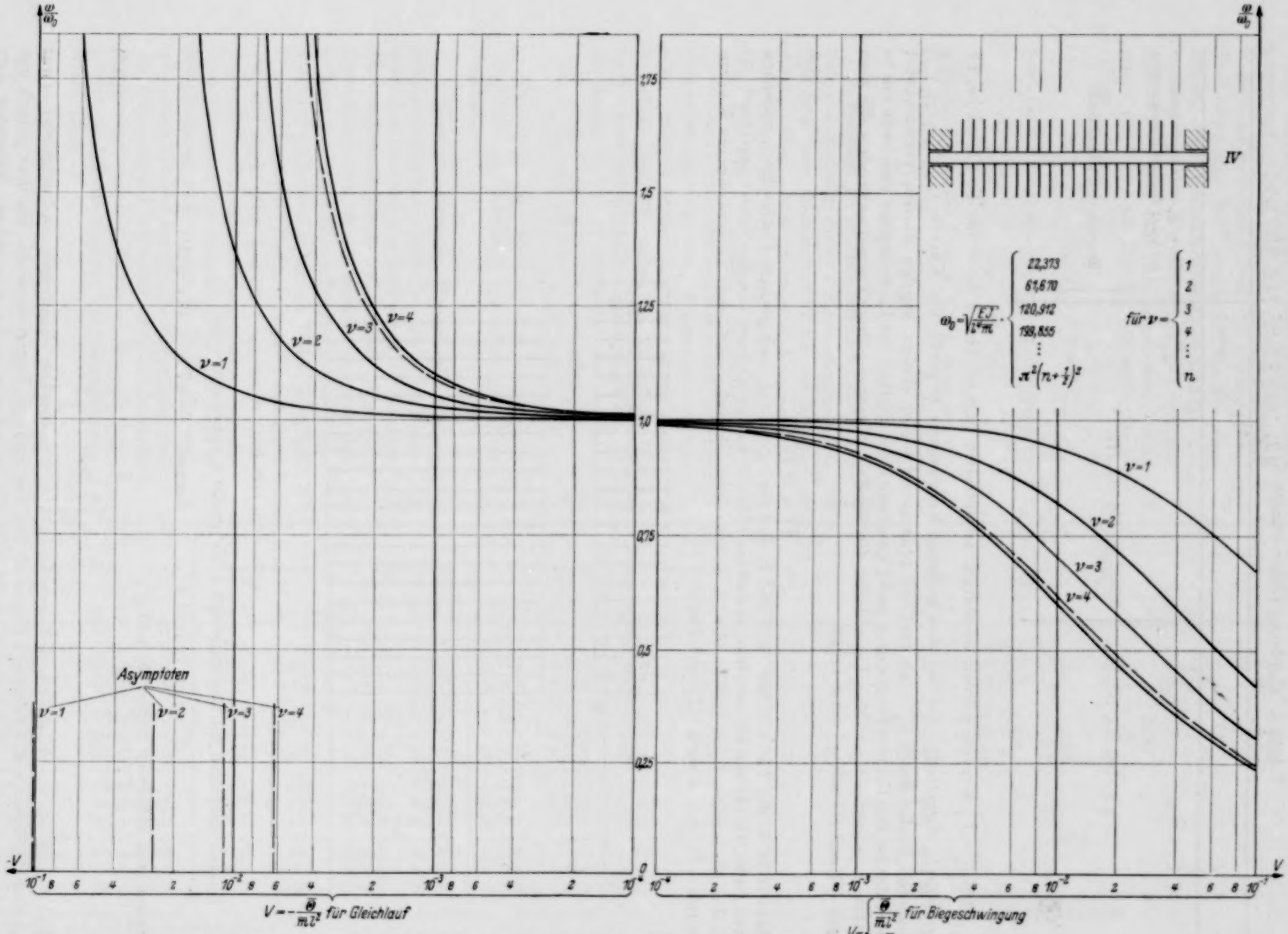


Abb. 6. Lagerungsfall IV: Abhängigkeit des Frequenzverhältnisses ω/ω_0 vom bezogenen Trägheitsmoment $V = \bar{\Theta}/l^3\bar{m}$ beim synchronen Gleichlauf, synchronen Gegenlauf und im Fall der Biegeschwingung (von der Grund- bis einschließlich der 3. Oberfrequenz).

Tabelle 4. *Zuordnung einiger Punkte der* $\frac{\omega}{\omega_0}$ *-V-Ebene zur* αl*-*p^2*-Ebene.*

p^2	$(\alpha l)^2$	V	ω/ω_0	
$+p^{*2}$	$-p^{*2}$	∞	0	Bereich des Gegenlaufs und der Biegeschwingungen
0	$(\alpha l)_0^2$	0	1	
	$\nu\pi$ bei II, III, IV	$-\frac{1}{\nu^2\pi^2}$ bei II, III, IV		
∞			∞	Bereich des Gleichlaufs
	$\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\pi$ bei I	$-\frac{1}{\left(\nu-\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}$ bei I		

Die $\left(\frac{\omega}{\omega_0}, V\right)$-Kurven wurden numerisch ausgewertet und in Abb. 3 bis 6 für die Fälle I bis IV graphisch dargestellt. Da bei den höheren Frequenzen (ν groß) die Kurven $f_{\mathrm{III}}^{(\nu)}=0$, $f_{\mathrm{IV}}^{(\nu)}=0$ näherungsweise durch $f_{\mathrm{II}}^{(\nu)}\equiv\sin(\alpha l)=0$ (daraus $\alpha l=\nu\pi$) ersetzt werden dürfen, verschwindet hier der bei den tieferen Frequenzen nicht unwesentliche Einfluß der Lagerungsart und zwar um so stärker, je größer ν ist. Man kann dafür die für Fall II streng gültige Formel anwenden, die man aus (6) und (7) mit $\alpha l=\nu\pi$ erhält:

$$\frac{\omega}{\omega_0}\approx\frac{1}{\sqrt{1+(\nu\pi)^2 V}}. \tag{12}$$

Man sieht in der Tat aus Abb. 4, 5 und 6, daß für $\nu=4$ nur noch geringe Unterschiede zwischen den Fällen II, III und IV bestehen, so daß man für $\nu>4$ ohne weiteres von der Näherungsformel (12) Gebrauch machen kann (die in Abb. 5 und 6 vergleichsweise gestrichelt eingezeichneten Kurven wurden für $\nu=4$ nach (12) berechnet).

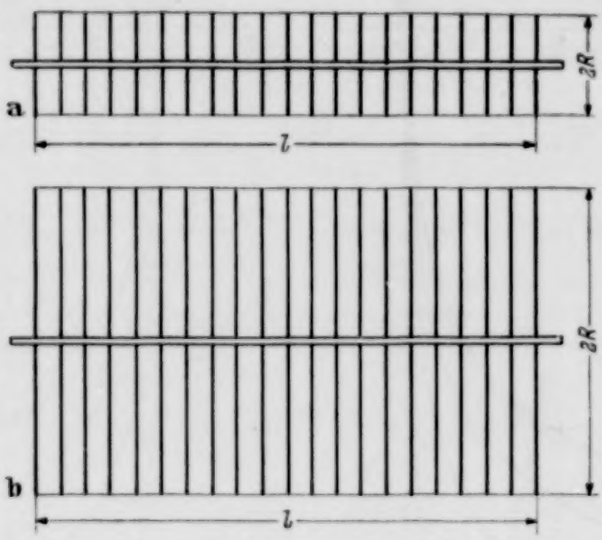


Abb. 7. Die im Beispiel behandelten Wellenbesetzungen
a) $R/l=0{,}1$, b) $R/l=0{,}3$.

Ebenso darf man im Lagerungsfall I für große ν näherungsweise

$$f_{\mathrm{I}}^{(\nu)}\equiv\cos(\alpha l)=0;\qquad\text{daraus}\qquad\alpha l=\frac{\pi}{2}(2\nu-1)$$

setzen und bekommt wegen (6) und (7)

$$\frac{\omega}{\omega_0}=\frac{1}{\sqrt{1+\left[\frac{\pi}{2}(2\nu-1)\right]^2 V}}. \tag{13}$$

Die danach für $\nu=4$ berechnete Kurve ist in Abb. 3 gestrichelt eingetragen und zeigt eine etwas größere Differenz mit der genauen Kurve als bei den anderen Lagerungsarten. Da diese jedoch mit wachsendem ν schnell abnimmt, stellt (13) für $\nu>4$ eine sehr brauchbare Näherung dar. Damit ist praktisch der gesamte Frequenzbereich erfaßt.

In Abb. 3 bis 6 sind die für den Gleichlauf, den Gegenlauf und die Biegeschwingung geltenden Relationen zwischen V und $\bar{\Theta}/l^2\,\bar{m}$ angegeben. Außerdem sind die Formeln für die Frequenzen ω_0 ohne Berücksichtigung der Trägheitsmomente in den einzelnen Diagrammen angeführt, so daß man bei gegebenen Daten sofort das Ergebnis für die kritischen Drehzahlen

$$n = \frac{30}{\pi}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\omega_0 \quad \text{(in U/min)}$$

bzw. für die Biegeschwingungseigenfrequenzen

$$f = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)\omega_0 \quad \text{(in Hz)}$$

angeben kann. Die Formel für ω_0 folgt aus (2) und (5) und lautet

$$\omega_0 = (\varkappa\, l)_0^2 \sqrt{\frac{E\,J}{l^4\,\bar{m}}}\,. \tag{14}$$

3. Beispiel. Es ist eine masselose Welle der Länge l, die mit dicht aufeinandersitzenden Scheiben vom Halbmesser R besetzt ist, gegeben. Das axiale Massenträgheitsmoment der Scheiben sowie ihre Masse je Längeneinheit seien bekannt ($\bar{\Theta}$ und $\bar{m}$). Es soll für den synchronen Gleich- und Gegenlauf und für reine Biegeschwingungen das Frequenzverhältnis ω/ω_0 ermittelt werden und zwar für die Lagerungsfälle I bis IV, wobei das Verhältnis R/l zu 0,1 bzw. 0,3 (Abb. 7) angenommen sei. Es gilt dann

$$\frac{\bar{\Theta}}{l^2\,\bar{m}} = \frac{1}{4}\left(\frac{R}{l}\right)^2 = \begin{cases} 0{,}0025\,, \\ \text{bzw. } 0{,}0225\,. \end{cases}$$

Mit Hilfe von Abb. 3 bis 6 erhält man sofort die in Tabelle 5 zusammengestellten Ergebnisse.

4. Zusammenfassung. Für eine gleichmäßig kontinuierlich besetzte Welle konstanter Biegesteifigkeit werden die kritischen Drehzahlen des synchronen Gleich- und Gegenlaufs und die Eigenfrequenzen der Biegeschwingungen berechnet, und zwar für vier verschiedene Lagerungsarten (fliegend gelagerte Welle; zweifach kugelig gelagert; ein Wellenende „eingespannt", das andere kugelig gelagert; zweifach „eingespannt"). Die genauen Ergebnisse für die Grundfrequenz bis einschließlich der dritten Oberfrequenz sind graphisch dargestellt und lassen den Einfluß der Trägheitsmomente und der Lagerungsart erkennen. Für die höheren Frequenzen werden Näherungsformeln mitgeteilt, so daß das gesamte Frequenzspektrum erfaßt wird.

(Eingegangen am 16. Januar 1958)

Anschrift der Verfasser: Dr.-Ing. *Hans Bufler* und Dipl.-Phys. *Hans Georg Hahn*, München, Technische Hochschule, Institut für Technische Mechanik.

Tabelle 5. *Frequenzverhältnis ω/ω_0 für das behandelte Beispiel.*

		Frequenzverhältnis ω/ω_0							
		Grundfrequenz ($\nu = 1$)		1. Oberfrequenz ($\nu = 2$)		2. Oberfrequenz ($\nu = 3$)		3. Oberfrequenz ($\nu = 4$)		n. Oberfrequenz ($\nu = n+1$) für $n > 3$	
		$R/l = 0{,}1$	$R/l = 0{,}3$	$R/l = 0{,}1$	$R/l = 0{,}3$	$R/l = 0{,}1$	$R/l = 0{,}3$	$R/l = 0{,}1$	$R/l = 0{,}3$	$R/l = 0{,}1$ ***	$R/l = 0{,}3$
Lagerungsfall I	Gleichlauf	1,006	1,048	1,040	1,725	1,115	—	1,245	—	$[1-(2n+1)^2\cdot 6{,}17\cdot 10^{-3}]^{-1/2}$	—
	Gegenlauf	0,983	0,871	0,896	0,566	0,794	0,416	0,697	0,321	$[1+(2n+1)^2\cdot 18{,}51\cdot 10^{-3}]^{-1/2}$	$[1+(2n+1)^2\cdot 16{,}65\cdot 10^{-3}]^{-1/2}$
	Biegeschw.	0,992	0,952	0,962	0,761	0,914	0,610	0,858	0,499	$[1+(2n+1)^2\cdot 6{,}17\cdot 10^{-3}]^{-1/2}$	$[1+(2n+1)^2\cdot 5{,}55\cdot 10^{-2}]^{-1/2}$
Lagerungsfall II	Gleichlauf	1,013	1,134	1,054	2,995	1,134	—	1,287	—	$[1-(n+1)^2\cdot 2{,}47\cdot 10^{-3}]^{-1/2}$	—
	Gegenlauf	0,965	0,774	0,878	0,522	0,775	0,378	0,676	0,293	$[1+(n+1)^2\cdot 7{,}41\cdot 10^{-3}]^{-1/2}$	$[1+(n+1)^2\cdot 6{,}66\cdot 10^{-1}]^{-1/2}$
	Biegeschw.	0,988	0,905	0,954	0,728	0,905	0,578	0,847	0,468	$[1+(n+1)^2\cdot 2{,}47\cdot 10^{-3}]^{-1/2}$	$[1+(n+1)^2\cdot 2{,}22\cdot 10^{-1}]^{-1/2}$
Lagerungsfall III	Gleichlauf	1,016	1,158	1,058	3,795*	1,145	—	1,304	—	**	—
	Gegenlauf	0,960	0,751	0,869	0,505	0,769	0,372	0,668	0,288	**	**
	Biegeschw.	0,985	0,895	0,948	0,711	0,900	0,575	0,840	0,462	**	**
Lagerungsfall IV	Gleichlauf	1,016	1,167	1,065	4,435*	1,155	—	1,320	—	**	—
	Gegenlauf	0,955	0,738	0,856	0,489	0,757	0,362	0,659	0,283	**	**
	Biegeschw.	0,985	0,880	0,945	0,701	0,895	0,558	0,833	0,452	**	**

* Diese Werte liegen außerhalb der Abb. 5 u. 6, können aber leicht mit Hilfe der Abb. 2 ermittelt werden.

** Es gelten jeweils dieselben Ausdrücke wie im Lagerungsfall II.

*** Für $\nu \geqq 7$ tritt hier kein Gleichlauf mehr auf.

Berechnung von Biegeschwingungen abgesetzter Wellen mit Zwischenbedingungen mittels Übertragungsmatrizen

Herrn Professor Dr. *A. Walther*, Darmstadt, zum 60. Geburtstag

Von **R. Zurmühl**

1. Einleitung. Kompliziertere Aufgaben der Biegeschwingung, insbesondere Schwingung abgesetzter Wellen mit Zwischenbedingungen, aber auch ebener und räumlicher Stabwerke sind in neuerer Zeit mehrfach mit Hilfe von Matrizen behandelt worden[1]. Dabei wurde die Rechnung, ausgehend von bekannten Randbedingungen am Balkenanfang, mit probeweise angenommenen Frequenzwerten durchgeführt, die solange abgeändert werden, bis die am Balkenende geforderten restlichen Randbedingungen erfüllt werden (Restgrößenverfahren). Dieses Vorgehen eignet sich besonders für den Einsatz digitaler Rechenautomaten, da der gleiche und in sich sehr homogene Rechenprozeß viele Male wiederholt wird, was der automatischen Rechnung sehr entgegenkommt. Für die Handrechnung ist indessen eine unmittelbare Frequenzberechnung wünschenswert. Im folgenden wird ein gleichfalls auf der Verwendung sogenannter Übertragungsmatrizen beruhendes Näherungsverfahren entwickelt, das die Aufgabe der Biegeschwingung abgesetzter Wellen stückweise konstanter Querschnitte mit beliebigen Rand- und Zwischenbedingungen in eine gewöhnliche Matrizeneigenwertaufgabe überführt, die sich durch gute Konvergenzeigenschaften zur iterativen Bestimmung der niedrigsten Eigenfrequenzen des Systems auszeichnet. Außer den Eigenfrequenzen erhält man die zugehörigen Schwingungsformen ohne zusätzlichen Arbeitsaufwand.

2. Herleitung der Matrizengleichungen. Die auf Biegeschwingung zu untersuchende Welle (Balken) sei in n Abschnitte (Felder) von jeweils konstanten, nicht notwendig verschiedenen Querschnitten unterteilt. Anfang und Ende des i-ten Abschnittes der Länge l_i, der Biegesteifigkeit $E\,I_i$ und der Massenbelegung μ_i je Längeneinheit seien mit $i-1$ bzw. i bezeichnet (Abb. 1). Feldgrenzen sind (starre oder elastische) Stützen, Gelenke, Einzelmassen, Querschnittssprünge, aber auch Stellen bloßer Unterteilungen, die aus Gründen der Genauigkeitssteigerung vorgenommen werden. Unter Vernachlässigung der Schubverformung gilt für das i-te Feld die Differentialgleichung der Biegelinie

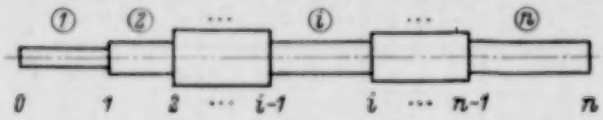


Abb. 1. Bezeichnung der Balkenabschnitte

$$E\,I_i\,w^{\mathrm{IV}}(x) = q(x) \tag{1}$$

mit der Belastungsdichte $q(x)$, für die im Falle freier Biegeschwingung die Trägheitslast

$$q(x) = \mu_i\,\omega^2\,w(x) \tag{2}$$

mit der — einstweilen noch unbekannten — Eigenfrequenz ω einzusetzen ist. Fassen wir die Belastung $q(x)$ zunächst als gegeben auf, so ergibt sich als Lösung von (1) ein linearer Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen — Durchbiegung w, Neigung w' (bei fehlender Schubdeformation gleich der Querschnittsneigung $-\varphi$), Biegemoment $M = -E\,I_i\,w''$ und Querkraft $Q = M'$ — in Feldanfang und Ende in der Form

$$\left.\begin{aligned} w_i &= w_{i-1} + w'_{i-1}\,l_i - M_{i-1}\frac{l_i^2}{2\,E\,I_i} - Q_{i-1}\frac{l_i^3}{6\,E\,I_i} + w_i^*\,,\\ w'_i &= \quad\; w'_{i-1} \quad - M_{i-1}\frac{l_i}{E\,I_i} \quad - Q_{i-1}\frac{l_i^2}{2\,E\,I_i} + w_i'^*\,,\\ M_i &= \qquad\quad M_{i-1} \qquad\quad + Q_{i-1}\,l_i \qquad\; + M_i^*,\\ Q_i &= \qquad\qquad\quad\; Q_{i-1} \qquad\quad\; + Q_i^* \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

[1] *E. Pestel*, Abh. Braunschw. Wiss. Ges. Bd. 6 (1954), S. 227; *S. Falk*, Abh. Braunschw. Wiss. Ges. Bd. 7 (1955), S. 74; *H. Fuhrke*, Ing.-Arch. 23 (1955), S. 329, Ing.-Arch. 24 (1956), S. 27; *H. Unger*, Intern. Koll. Probl. Rechentechnik, Dresden 1955, S. 141.

mit den Belastungsgliedern[1]

$$\left.\begin{aligned} Q^*(x) &= -\int_0^x q(\xi)\,d\xi\,, & Q_i^* &= Q^*(l_i)\,,\\ M^*(x) &= \int_0^x Q^*(\xi)\,d\xi\,, & M_i^* &= M^*(l_i)\,,\\ w'^*(x) &= -\frac{1}{E\,I_i}\int_0^x M^*(\xi)\,d\xi\,, & w_i'^* &= w'^*(l_i)\,,\\ w^*(x) &= \int_0^x w'^*(\xi)\,d\xi\,, & w_i^* &= w^*(l_i)\,. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Die Vorzeichen sind dabei nach Abb. 2 gewählt.

Fassen wir die vier Zustandsgrößen zum Zustandsvektor $\mathfrak{z}_i$, die entsprechenden Belastungsgrößen zum Belastungsvektor $\mathfrak{z}_i^*$ zusammen:

$$\mathfrak{z}_i = \begin{pmatrix} w_i \\ w_i' \\ M_i \\ Q_i \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{z}_i^* = \begin{pmatrix} w_i^* \\ w_i'^* \\ M_i^* \\ Q_i^* \end{pmatrix}, \tag{5}$$

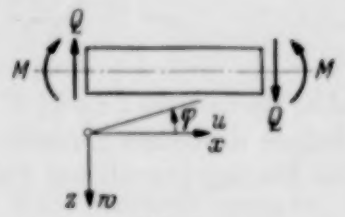


Abb. 2.
Vorzeichen der Zustandsgrößen.

so schreibt sich (3) in Matrizenform

$$\mathfrak{z}_i = \mathfrak{F}_i\,\mathfrak{z}_{i-1} + \mathfrak{z}_i^* \tag{6}$$

mit der von den Feldabmessungen abhängigen Feldmatrix = Übertragungsmatrix

$$\mathfrak{F}_i = \begin{pmatrix} 1 & l & -\frac{l^2}{2\,E\,I} & -\frac{l^3}{6\,E\,I} \\ 0 & 1 & -\frac{l}{E\,I} & -\frac{l^2}{2\,E\,I} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_i . \tag{7}$$

Die Feldmatrix $\mathfrak{F}_i$ überträgt die am Feldanfang herrschenden, im Vektor $\mathfrak{z}_{i-1}$ zusammengefaßten Zustandsgrößen auf die neuen, am Feldende herrschenden unter Hinzutreten der Lasteinflüsse $\mathfrak{z}_i^*$.

3. Näherungsformel für den Belastungsvektor. Die Komponenten des Belastungsvektors $\mathfrak{z}_i^*$ errechnen sich nach (4) aus der Feldbelastung $q(x)$, die zufolge (2) der unbekannten Durchsenkung $w(x)$ proportional ist. Diese aber läßt sich angenähert mit Hilfe der Werte w_i an den Feldgrenzen ausdrücken, und zwar bedienen wir uns dazu zweckmäßig einer sogenannten *Hermite*schen Interpolation, bei der als Stützwerte außer Funktionswerten w_i auch noch Ableitungen bis zu einer bestimmten Ordnung benutzt werden, die ja im Zustandsvektor bis zur dritten Ordnung vorkommen. Einfachheitshalber beschränken wir uns hier auf Mitnahme der ersten Ableitungen und benutzen als Stützwerte der Interpolationsformel für $w(x)$ des i-ten Feldes die vier Randwerte w_{i-1}, w_{i-1}', w_i, w_i', nähern also $w(x)$ durch eine — recht genaue — kubische Interpolationsparabel an. Bezeichnen wir vorübergehend die Feldgrenzen mit 0 und 1 und setzen die Feldlänge l_i gleich 1, so lautet der Näherungsausdruck für $w(x)$:

$$w(x) = L_0(x)\,w_0 + L_1(x)\,w_1 + H_0(x)\,w_0' + H_1(x)\,w_1' , \tag{8}$$

wo sich die vier Interpolationspolynome dritten Grades $L_j(x)$, $H_j(x)$ aus den Forderungen

$$\begin{aligned} L_0(0) &= 1\,, & L_0(1) &= 0\,, & L_0'(0) &= 0\,, & L_0'(1) &= 0\,,\\ L_1(0) &= 0\,, & L_1(1) &= 1\,, & L_1'(0) &= 0\,, & L_1'(1) &= 0\,,\\ H_0(0) &= 0\,, & H_0(1) &= 0\,, & H_0'(0) &= 1\,, & H_0'(1) &= 0\,,\\ H_1(0) &= 0\,, & H_1(1) &= 0\,, & H_1'(0) &= 0\,, & H_1'(1) &= 1 \end{aligned}$$

[1] Nach *S. Falk*, Ing.-Arch. 24 (1956) S. 216.

ergeben zu

$$\left.\begin{aligned} L_0(x) &= 1 - 3x^2 + 2x^3, \\ L_1(x) &= 3x^2 - 2x^3, \\ H_0(x) &= x - 2x^2 + x^3, \\ H_1(x) &= -x^2 + x^3. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Hiermit errechnen sich dann die Belastungsglieder aus (4), wenn wir noch wieder auf die Feldlänge $l_i = l$ übergehen, zu

$$\left.\begin{aligned} Q_i^* &= -\mu\omega^2 l\left[\frac{1}{2}(w_{i-1} + w_i) + \frac{l}{12}(w'_{i-1} - w'_i)\right] - m_i\omega^2 w_i, \\ M_i^* &= -\mu\omega^2 l^2\left[\frac{1}{20}(7w_{i-1} + 3w_i) + \frac{l}{60}(3w'_{i-1} - 2w'_i)\right] + \Theta_i\omega^2 w'_i, \\ w'^*_i &= \frac{\mu\omega^2 l^3}{EI}\left[\frac{1}{30}(4w_{i-1} + w_i) + \frac{l}{120}(2w'_{i-1} - w'_i)\right], \\ w_i^* &= \frac{\mu\omega^2 l^4}{EI}\left[\frac{1}{168}(6w_{i-1} + w_i) + \frac{l}{1260}(5w'_{i-1} - 2w'_i)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Dabei ist überall $l = l_i$, $EI = EI_i$, $\mu = \mu_i$ zu setzen. Zugleich haben wir hier noch den Einfluß etwaiger diskreter Einzelmassen m_i und Einzeldrehmassen Θ_i in Q_i und M_i berücksichtigt, wobei diese Massen jeweils am Feldende sitzen.

4. Einführen bezogener Größen. Zur Vereinfachung der Zahlenrechnung führen wir bezogene Zustandsgrößen ein unter Verwendung einer — an sich beliebigen — Bezugslänge $\bar{l}$, einer Bezugssteifigkeit $\overline{EI}$ und für das weitere einer Bezugsmassenbelegung $\bar{\mu}$. Als endgültige Zustandsgrößen wählen wir, unter Vorzeichenumkehr bei w zur Vermeidung negativer Elemente in $\mathfrak{F}$,

$$\bar{w} = -w, \qquad \bar{\varphi} = -w'\bar{l}, \qquad \bar{M} = \frac{M\bar{l}^2}{6\overline{EI}}, \qquad \bar{Q} = \frac{Q\bar{l}^3}{6\overline{EI}} \tag{11}$$

als Komponenten des Zustandsvektors $\mathfrak{z}_i$. Mit den Verhältniszahlen

$$\beta_i = \frac{l_i}{\bar{l}}, \qquad \alpha_i = \frac{EI_i}{\overline{EI}} \tag{12}$$

wird die Feldmatrix

$$\mathfrak{F}_i = \begin{pmatrix} 1 & \beta & \frac{3\beta^2}{\alpha} & \frac{\beta^3}{\alpha} \\ 0 & 1 & \frac{6\beta}{\alpha} & \frac{3\beta^2}{\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_i. \tag{13}$$

Mit den weiteren Verhältniszahlen

$$\varrho_i = \frac{\mu_i}{\bar{\mu}}, \qquad \sigma_i = \frac{m_i}{\bar{\mu}\bar{l}}, \qquad \tau_i = \frac{\Theta_i}{\bar{\mu}\bar{l}^3} \tag{14}$$

sowie den Frequenzparametern

$$\bar{\lambda}^4 = \frac{\bar{\mu}\omega^2\bar{l}^4}{\overline{EI}}, \qquad \Lambda = \frac{\bar{\lambda}^4}{2520} \tag{15}$$

erhalten wir dann für die Komponenten des Belastungsvektors $\mathfrak{z}_i^*$ aus (10):

$$\left.\begin{aligned} \bar{w}_i^* &= \Lambda\frac{\varrho\beta^4}{\alpha}(90\bar{w}_{i-1} + 10\beta\bar{\varphi}_{i-1} + 15\bar{w}_i - 4\beta\bar{\varphi}_i), \\ \bar{\varphi}_i^* &= \Lambda\frac{\varrho\beta^3}{\alpha}(336\bar{w}_{i-1} + 42\beta\bar{\varphi}_{i-1} + 84\bar{w}_i - 21\beta\bar{\varphi}_i), \\ \bar{M}_i^* &= \Lambda\varrho\beta^2(147\bar{w}_{i-1} + 21\beta\bar{\varphi}_{i-1} + 63\bar{w}_i - 14\beta\bar{\varphi}_i) - 420\Lambda\tau_i\bar{\varphi}_i, \\ \bar{Q}_i^* &= \Lambda\varrho\beta(210\bar{w}_{i-1} + 35\beta\bar{\varphi}_{i-1} + 210\bar{w}_i - 35\beta\bar{\varphi}_i) + 420\Lambda\sigma_i\bar{w}_i, \end{aligned}\right\} \tag{10a}$$

wo überall vereinfachend ϱ, β, α anstatt $\varrho_i, \beta_i, \alpha_i$ geschrieben ist. Fassen wir die hier auftretenden Biege-Stützwerte $\overline{w}_i$, $\overline{\varphi}_i$ zum Teil-Biegevektor

$$\mathfrak{w}_i = \begin{pmatrix} \overline{w}_{i-1} \\ \overline{\varphi}_{i-1} \\ \overline{w}_i \\ \overline{\varphi}_i \end{pmatrix}, \tag{16}$$

die Koeffizienten in (10a) aber zur Belastungsmatrix

$$\mathfrak{B}_i = \begin{pmatrix} 90\,\varrho\,\beta^4/\alpha & 10\,\varrho\,\beta^5/\alpha & 15\,\varrho\,\beta^4/\alpha & -4\,\varrho\,\beta^5/\alpha \\ 336\,\varrho\,\beta^3/\alpha & 42\,\varrho\,\beta^4/\alpha & 84\,\varrho\,\beta^3/\alpha & -21\,\varrho\,\beta^4/\alpha \\ 147\,\varrho\,\beta^2 & 21\,\varrho\,\beta^3 & 63\,\varrho\,\beta^2 & -14\,(\varrho\beta^3+30\tau) \\ 210\,\varrho\,\beta & 35\,\varrho\,\beta^2 & 210\,(\varrho\beta+2\sigma) & -35\,\varrho\,\beta^2 \end{pmatrix}_i \tag{17}$$

zusammen, so erhalten wir als Näherungsausdruck für den Belastungsvektor

$$\mathfrak{z}_i^* = \Delta\,\mathfrak{B}_i\,\mathfrak{w}_i\,. \tag{18}$$

Damit läßt sich nun die Rechnung, zunächst für den Balken ohne Zwischenbedingungen, auf folgende Weise durchführen.

5. Der Rechnungsgang. Man beginnt die Rechnung am Balkenanfang $i = 0$, wo von den vier Zustandsgrößen des Vektors $\mathfrak{z}_0$, den wir in der Form

$$\mathfrak{z}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overline{w}_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overline{\varphi}_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \overline{M}_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overline{Q}_0 \tag{19}$$

aufspalten können, zwei aus Randbedingungen bekannt sind; z. B. ist bei freier Lagerung $\overline{w}_0 = \overline{M}_0 = 0$, womit sich (19) auf

$$\mathfrak{z}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overline{\varphi}_0 + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \overline{Q}_0 \tag{19a}$$

reduziert mit zunächst unbekannten Faktoren $\overline{\varphi}_0$, $\overline{Q}_0$, welche durch die gesamte Rechnung als Unbekannte mitzuführen sind und sich zum Schluß aus den am Balkenende gegebenen zwei weiteren Randbedingungen ermitteln lassen. Allgemein wird der Anfangsvektor $\mathfrak{z}_0$ die Form

$$\mathfrak{z}_0 = \mathfrak{e}_1\,X_1 + \mathfrak{e}_2\,X_2 \tag{20}$$

haben mit zwei Unbekannten X_1, X_2 und zwei Vektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, die im einfachsten Falle, wie oben, Einheitsvektoren sind, davon aber auch, wie sich noch zeigen wird, abweichen können. Dem Vektor $\mathfrak{z}_0$ sind somit zwei Spalten zugeordnet, die man sich mit den beiden Unbekannten X_1, X_2 als Faktoren versehen denkt, und die nun der fortgesetzten Multiplikation mit den Feldmatrizen $\mathfrak{F}_i$ der aufeinander folgenden Balkenabschnitte unterworfen werden. Dabei bedient man sich zweckmäßig einer von *Falk* vorgeschlagenen Anordnung für die Multiplikation von Matrix mal Vektor nach Rechenschema 1. — Zu diesen beiden X-Spalten treten nun der Reihe nach weitere, von den Belastungsvektoren $\mathfrak{z}_i^*$ herrührende Spalten, versehen mit den gleichfalls noch unbekannten Faktoren $\Delta\,\overline{w}_i$, $\Delta\,\overline{\varphi}_i$, und zwar für jedes Feld ein Paar neuer Biegegrößen, sofern nicht, durch Rand- und Zwischenbedingungen, einige dieser Größen zu Null werden, wobei die zugehörige Spalte entfällt. Die Vektoren $\mathfrak{z}_i$ erscheinen somit in eine wachsende Anzahl von Spalten zerlegt. Auf alle diese Spalten wird fortgesetzt die Multiplikation mit der Feldmatrix, $\mathfrak{F}_i\,\mathfrak{z}_{i-1}$ angewandt, wobei jeweils in den vier letzten Spalten noch der nach (18) gebildete Lastvektor $\mathfrak{z}_i^*$ als Summand hinzugeschlagen wird. Auf diese Weise baut sich ein Rechenschema 2 auf, in dem außer den als Faktoren

fungierenden Feldmatrizen $\mathfrak{F}_i$ auch die Belastungsmatrizen $\mathfrak{B}_i$ eingetragen sind.

Rechenschema 1

Am Balkenende, $i = n$, treten nun zwei weitere Randbedingungen auf, z. B. bei freier Endlagerung $\overline{w}_n = 0$, $\overline{M}_n = 0$. Dies ergibt zwei Gleichungen für die beiden Anfangs-Unbekannten X_1, X_2. Fassen wir diese zum Vektor $\mathfrak{x}$, die Biegegrößen $\overline{w}_i$, $\overline{\varphi}_i$ aber zum Gesamt-Biegevektor $\mathfrak{w}$ zusammen:

$$\mathfrak{w} = \begin{pmatrix} \overline{w}_0 \\ \overline{\varphi}_0 \\ \overline{w}_1 \\ \overline{\varphi}_1 \\ \vdots \\ \overline{w}_n \\ \overline{\varphi}_n \end{pmatrix}, \tag{21}$$

so schreiben sich die Endbedingungen in der Form

$$\mathfrak{P}\,\mathfrak{x} + A\,\mathfrak{Q}\,\mathfrak{w} = 0\,, \tag{22}$$

wo die Koeffizienten der Matrizen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ unmittelbar den beiden Zeilen von $\mathfrak{z}_n$, welche den Endbedingungen entsprechen, zu entnehmen sind. Ist $\mathfrak{P}$ nichtsingulär, was die Regel sein wird, so lassen sich hieraus die beiden Unbekannten $\mathfrak{x}$ in der Form

$$\mathfrak{x} = A\,\mathfrak{C}\,\mathfrak{w} \tag{23}$$

Rechenschema 2 zum Aufbau der Zustandsvektoren $\mathfrak{z}_i$

		$\mathfrak{x}$		$A\mathfrak{w}$									
		X_1	X_2	$A\overline{w}_0$	$A\overline{\varphi}_0$	$A\overline{w}_1$	$A\overline{\varphi}_1$	$A\overline{w}_2$	$A\overline{\varphi}_2$	...	$A\overline{w}_n$	$A\overline{\varphi}_n$	
		. . . .	. . . .										$\mathfrak{z}_0$
$\mathfrak{B}_1$	$\mathfrak{F}_1$	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .						$\mathfrak{z}_1$
$\mathfrak{B}_2$	$\mathfrak{F}_2$	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .				$\mathfrak{z}_2$
...	...												
$\mathfrak{B}_n$	$\mathfrak{F}_n$	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .	. . . .		. . . .	. . . .	$\mathfrak{z}_n$

durch Elimination ermitteln, wobei die Matrix $\mathfrak{C}$ sich als Lösung des Gleichungssystems

$$\mathfrak{P}\,\mathfrak{C} + \mathfrak{Q} = 0 \tag{24}$$

ergibt, wie leicht nachzurechnen. Hat man auf diese Weise die Unbekannten $\mathfrak{x}$ in Abhängigkeit von $\mathfrak{w}$ ausgedrückt, so ergeben sich sämtliche Biegegrößen $\mathfrak{w}$ aus den jeweils ersten beiden Zeilen der Vektoren $\mathfrak{z}_i$. Sie erscheinen im Schema in der Form

$$\mathfrak{w} = \mathfrak{R}\,\mathfrak{x} + A\,\mathfrak{S}\,\mathfrak{w}\,, \tag{25}$$

woraus durch Einsetzen von (23) für die Biegegrößen folgt

$$\mathfrak{w} = A(\mathfrak{R}\,\mathfrak{C} + \mathfrak{S})\,\mathfrak{w} = A\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{w} \tag{26}$$

oder mit

$$\varkappa = \frac{1}{A} = \frac{2520}{\bar{\lambda}^4}$$

endgültig

$$\mathfrak{A}\,\mathfrak{w} = \varkappa\,\mathfrak{w} \tag{27}$$

mit der Matrix

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{R}\,\mathfrak{C} + \mathfrak{S}\,. \tag{28}$$

die sich unmittelbar an Hand des Rechenschemas 3 aufbaut. Damit ist die Aufgabe der Biegeschwingung auf eine Matrizeneigenwertaufgabe zurückgeführt.

Die numerische Lösung der Eigenwertaufgabe (27) geschieht am einfachsten iterativ nach dem bekannten *v. Mises*schen Iterationsverfahren[1], das bekanntlich gegen den betragsmäßig größten Eigenwert $\varkappa_1$ konvergiert. Dem entspricht der kleinste Wert A_1, der ω_1^2 proportional ist, dem Quadrat der in der Regel interessierenden niedrigsten Eigenfrequenz. Da bei Biegeschwingungen die Eigenfrequenzen ω_j mit steigender Ordnung j angenähert wie die Quadratzahlen j^2 zunehmen, die Werte A_j also wie j^4, so ist im allgemeinen sehr gute Konvergenz des Iterationsverfahrens zu erwarten, was durch Zahlenrechnungen bestätigt wird. Die beim Iterationsverfahren gleichfalls anfallenden Eigenvektoren $\mathfrak{w}$ stellen zugleich die Biegeschwingungsformen in Gestalt diskreter Ordinaten nebst Steigungen dar. Hiernach läßt sich dann auch der Ausgangsvektor des Iterationsverfahrens hinreichend gut schätzen, so daß sich die Rechnung rasch einspielt.

Rechenschema 3
zur Aufstellung der Matrix $\mathfrak{A}$

$\mathfrak{x}$	$A\mathfrak{w}$	
$(\mathfrak{R})$	$(\mathfrak{S})$	
$(\mathfrak{P})$	$(\mathfrak{Q})$	
	Elimination	
$\mathfrak{E}'$	$\begin{matrix} 1 & & \\ & 1 & 0 \\ & \ddots & \\ & 0 & 1 \end{matrix}$	
	$\mathfrak{A}$	

6. Beispiel. Für die abgesetzte, beiderseits frei gelagerte Welle nach Abb. 3 mit

$$\bar{l} = l\,, \qquad \overline{E\,I} = E\,I\,, \qquad \bar{\mu} = \mu\,,$$
$$\alpha_1 = 4\,, \qquad \varrho_1 = 2\,, \qquad \beta_1 = 1\,,$$
$$\alpha_2 = 1\,, \qquad \varrho_2 = 1\,, \qquad \beta_2 = 1$$

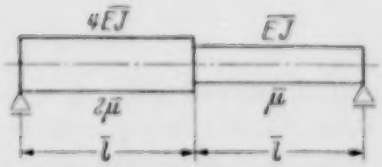


Abb. 3. Abgesetzte Welle

[1] Vgl. z. B. *R. Zurmühl*, Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker. S. 159ff. 2. Aufl. Berlin, Göttingen, Heidelberg 1957.

erfolgt die Rechnung nach dem Schema 4

Rechenschema 4

$\mathfrak{B}_i$	$\mathfrak{F}_i$	$\bar{\varphi}_0$	Q_0	$\Delta\varphi_0$	$\Delta\bar{w}_1$	$\Delta\bar{\varphi}_1$	$\Delta\bar{\varphi}_2$	
		0	0					$\bar{w}_0 = 0$
		1	0					$\bar{\varphi}_0$
		0	0					
		0	1					
45 5 7,5 — 2	1 1 3/4 1/4	1	1/4	5	7,5	— 2		$\bar{w}_1$
118 21 42 —10,5	0 1 3/2 3/4	1	3/4	21	42	— 10,5		$\bar{\varphi}_1$
294 42 126 —28	0 0 1 1	0	1	42	126	— 28		
420 70 420 —70	0 0 0 1	0	1	70	420	— 70		
90 10 15 — 4	1 1 3 1	2	5	222	937,5	—156,5	— 4	0
336 42 84 —21	0 1 6 3	1	39/4	483	2394	—346,5	—21	$\bar{\varphi}_2$
147 21 63 —14	0 0 1 1	0	2	112	693	— 77	—14	0
210 35 210 —35	0 0 0 1	0	1	70	630	— 35	—35	
		2	5	222	937,5	—156,5	— 4	
		0	2	112	693	— 77	—14	
	$\mathfrak{C}'$	29	— 56	1				$\Delta\bar{\varphi}_0$
		397,5	—346,5		1			$\Delta\bar{w}_1$
		—18	38,5			1		$\Delta\bar{\varphi}_1$
		—15,5	7				1	$\Delta\varphi_2$
	$\mathfrak{A}$	29	397,5	—18	—15,5			$= \bar{\varphi}_0$
		20	318,375	—10,375	—13,75			$= \bar{w}_1$
		8	179,625	0,375	—10,25			$= \bar{\varphi}_1$
		—34	—586,875	10,875	31,75			$= \bar{\varphi}_2$

Die Durchführung der Iteration an der Matrix $8\,\mathfrak{A}$ zeigt das Rechenschema 5

Rechenschema 5

$\bar{\varphi}_0$	$\bar{w}_1$	$\bar{\varphi}_1$	$\bar{\varphi}_2$
232	3180	—144	—124
160	2547	— 83	—110
64	1437	3	— 82
—272	—4695	87	254
2	2	1	— 3
7052	5661	3251	—10609
1,25	1	0,57	— 1,87
3619,8	2905,4	1672	— 5460,4
1,2459	1	0,5755	— 1,8794
3619,22	2905,31	1672,57	— 5461,18
1,245 726	1	0,575 694	— 1,879 724
3619,194	2905,303	1672,591	— 5461,202
1,245 720	1	0,575 703	— 1,879 736 $= w_1$
	2905,303		

$$8\,\varkappa_1 = 2905{,}303$$
$$\varkappa_1 = 363{,}163$$
$$\bar{\lambda}_1^{-1} = 6{,}939\,03$$
$$\bar{\lambda}_1 = 1{,}623\,02$$
exakt $1{,}620\,43$
Fehler $0{,}002\,59 = 1{,}6\,‰$

Zur Berechnung des nächsthöheren Eigenwertes $\bar{\lambda}_2$ könnte man die Iteration mit zum ersten Eigenvektor w_1 orthogonalen Vektoren durchführen (Verfahren von *Koch*); doch wäre dabei feinere Unterteilung der Welle anzuraten.

7. Stützfedern. An durch Federn oder Drehfedern elastisch gestützten Balkenstellen treten Sprünge in den Querkräften bzw. Biegemomenten auf, die der Durchsenkung w_i bzw. Neigung φ_i proportional sind. Führen wir an Stelle der Federkonstanten c_i bzw. Drehfederkonstanten C_i dimensionslose Zahlen

$$\gamma_i = \frac{c_i \bar{l}^3}{6\,E\,I}, \qquad \Gamma_i = \frac{C_i \bar{l}}{6\,E\,I} \tag{29}$$

ein und bezeichnen die Stelle unmittelbar vor der Stütze mit i', die unmittelbar dahinter wieder mit i, so ergeben sich die Sprungbeziehungen

$$\bar{Q}_i = \bar{Q}_{i'} - \gamma_i \bar{w}_i, \qquad \bar{M}_i = \bar{M}_{i'} + \Gamma_i \bar{\varphi}_i. \tag{30}$$

Der Übergang vom Zustandsvektor $\mathfrak{z}_{i'}$ vor auf den Vektor $\mathfrak{z}_i$ hinter der Stütze i läßt sich dann gleichfalls in Matrizenform schreiben zu

$$\mathfrak{z}_i = \mathfrak{P}_i\, \mathfrak{z}_{i'}, \tag{31}$$

mit einer sich auf den Stützpunkt i beziehenden Übertragungsmatrix, einer Punktmatrix

$$\mathfrak{P}_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \Gamma_i & 1 & 0 \\ -\gamma_i & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{32}$$

An Stelle von (6) tritt dann

$$\mathfrak{z}_i = \mathfrak{P}_i\, \mathfrak{F}_i\, \mathfrak{z}_{i-1} + \mathfrak{z}_i^*. \tag{6a}$$

Die hier auftretende Produktbildung $\mathfrak{P}_i\, \mathfrak{F}_i$ von Punkt- und Leitmatrix läßt sich nun nach einem Vorschlag von *Falk* auf vereinfachte Weise vornehmen, indem man an Stelle der Feldmatrix eine nichtquadratische, aus vier Zeilen und sechs Spalten bestehende sogenannte Leitmatrix $\mathfrak{L}_i$ verwendet, welche Feld- und Punktmatrix in sich vereinigt. Sie lautet hier

$$\mathfrak{L}_i = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & \beta & \frac{3\beta^2}{\alpha} & \frac{\beta^3}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6\beta}{\alpha} & \frac{3\beta^2}{\alpha} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & \beta & 0 & \Gamma \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\gamma & 0 \end{array}\right)_i. \tag{33}$$

Damit schreibt man dann anstelle von (6a)

$$\mathfrak{z}_i = \mathfrak{L}_i\, \mathfrak{z}_{i-1} + \mathfrak{z}_i^*, \tag{6b}$$

wobei aber nun abweichend vom Üblichen die Matrizenproduktbildung so verstanden sein soll, daß die erste bis vierte Spalte von $\mathfrak{L}_i$ wie üblich skalar mit den vier Komponenten von $\mathfrak{z}_{i-1}$, die beiden letzten Spalten aber mit den beiden ersten Komponenten $\bar{w}_i$ und $\bar{\varphi}_i$ des neuen Vektors $\mathfrak{z}_i$ multipliziert werden. Die Produktbildung erfolgt also überlappend. Das ist dadurch möglich, daß die Zusatzspalten von $\mathfrak{L}_i$ in ihren beiden ersten Zeilen, welche die neuen Werte $\bar{w}_i$ und $\bar{\varphi}_i$ erst ergeben, Nullen aufweisen. Die Zusatzspalten treten also erst in Aktion, nachdem diese beiden neuen Komponenten von $\mathfrak{z}_i$ bereits vorliegen, nämlich bei Berechnung von M_i und Q_i, die dann die Werte rechts vom Stützpunkt, also mit Zuschlag der Sprünge darstellen. Die Werte links vom Stützpunkt ergeben sich ohne Berücksichtigung der Zusatzspalten der Leitmatrix. — Bei Federn am Balkenanfang sind schon die Anfangsvektoren für die Unbekannten $\bar{w}_0$ bzw. $\bar{\varphi}_0$ entsprechend abzuändern in

$\bar{w}_0$	$\bar{\varphi}_0$
1	0
0	1
0	Γ_0
$-\gamma_0$	0

8. Innere Randbedingungen (Zwischenbedingungen). Außer den an den beiden Balkenenden gegebenen je zwei Randbedingungen können auch an Zwischenstellen geometrische oder dynamische Bedingungen als innere Randbedingungen auftreten, was das Auftreten zusätzlicher Unbekannter zur Folge hat. Die praktisch bedeutsamsten Fälle sind: festes Lager mit der Bedingung $w_i = 0$ und Gerbergelenk mit der Bedingung $M_i = 0$. Zusätzliche Unbekannte ist im ersten Falle die Lagerkraft A_i gleich einem Querkraftsprung ΔQ_i, im zweiten Falle eine Winkeländerung $\Delta\varphi_i$.

Der Rechenablauf wird hiervon nur in der Weise berührt, als außer den beiden Anfangsunbekannten X_1, X_2 noch weitere Unbekannte X_3, X_4 ... auftreten, die in die Rechnung eintreten, sobald man an die Stelle der inneren Randbedingung angelangt ist. Es erhöht sich also lediglich die Zahl der Unbekannten-Spalten, die sich nach und nach auffüllen, und der Vektor $\mathfrak{x}$ der Unbekannten X_i enthält mehr als nur zwei Komponenten. Ist die Rechnung am Balkenende angekommen, so hat man außer den beiden Endbedingungen nun auch noch alle Zwischenbedingungen zu berücksichtigen, was wieder auf Gleichungen der Form (22) bzw. (24) führt, nur daß die in ihnen auftretenden Matrizen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ aus mehr als zwei Zeilen bestehen. Ihre Elimination ist indessen nicht wesentlich umständlicher als bei nur zwei Unbekannten, da die Gleichungsmatrix $\mathfrak{P}$ infolge stufenweisen Eintretens der neuen Unbekannten von „fastgestaffelter "Form ist, d. h. oberhalb der Hauptdiagonalen nur eine Reihe mit von Null verschiedenen Elementen aufweist. Die Berechnung der Matrix $\mathfrak{A}$ verläuft in der gleichen Weise wie oben.

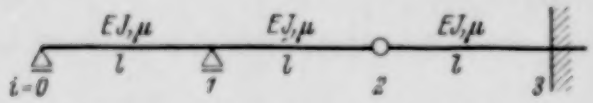


Abb. 4. Welle mit Zwischenstütze und Zwischengelenk.

Wir erläutern das Gesagte an einem Beispiel einer Welle mit Zwischenstütze und Zwischengelenk (Abb. 4).

Die Rechnung erfolgt nach dem Schema 6, wo die — in sich gleichen — Belastungsmatrizen fortgelassen sind.

Rechenschema 6

				$\bar{\varphi}_0$	$\bar{Q}_0$	$\Delta\bar{Q}_1$	$\Delta\bar{\varphi}_1$	$\Delta\bar{w}_2$	$\Delta\bar{\varphi}_2$	$\Delta\bar{Q}_2$	
				0	0						
				1	0						
	$\mathfrak{F}_i$			0	0						$\bar{\varphi}_0$
				0	1						
1	1	3	1	1	1	0	10	— 4			0
	1	6	3	1	3	0	42	— 21			$\bar{\varphi}_1$
		1	1	0	1	0	21	— 14			
			1	0	1	1	35	— 35			
1	1	3	1	2	8	1	0	150	— 92	15 — 4	$\bar{w}_2$
	1	6	3	1	12	3	(1)	273	—168	84 — 21	$\bar{\varphi}_2$, $\Delta\bar{\varphi}_2$
		1	1	0	2	1	0	56	— 28	63 — 14	0
			1	0	1	1	0	35	0	210 — 35	
1	1	3	1	3	27	8	1	626	—344	588 — 92 10	0
	1	6	3	1	27	12	1	714	—336	1428 —168 42	0
		1	1	0	3	2	0	91	— 28	420 — 28 21	
			1	0	1	1	0	35	0	420 0 35	
Endgleichungen				1	1	0	0	10	— 4	0 0 0	$w_1 = 0$
				0	2	1	0	56	— 28	63 — 14 0	$M_2 = 0$
				3	27	8	1	626	—344	588 — 92 10	$w_3 = 0$
				1	27	12	1	714	—336	1428 —168 42	$\varphi_3 = 0$
Elimination				1	1	0	0	10	— 4	0 0 0	
				0	2	1	0	56	— 28	63 — 14 0	
				— 3	—12	— 4	1	— 76	4	— 168 76 10	
				— 1	—13	— 1/4	3/4	— 5	31	651 — 5 39,5	
				28/3	—58/3	— 52/3	20/3	1			
				—44/3	56/3	— 28/3	—124/3		1		
		$\mathfrak{C}'$		—98	98	—259	—868			1	
				10/3	—10/3	62/3	20/3			1	
				—16/3	16/3	— 32/3	—158/3				1
								28/3	—44/3	— 98 10/3	—16/3
								—20/3	61/3	196 —20/3	32/3
			$\mathfrak{A}$					—10/3	56/3	344 —10/3	64/3
								— 5/3	40/3	385 13/3	80/3
								20/3	—124/3	—868 20/3	—158/3

Hier ist als fünfte Biegegröße in $\mathfrak{w}$ die Winkeländerung $\Delta\bar{\varphi}_2$ an Stelle des neuen Winkels $\bar{\varphi}_2 + \Delta\bar{\varphi}_2$ gewählt worden.

Die Iteration an der Matrix $3\mathfrak{N}$ zeigt das Rechenschema 7.

Rechenschema 7

$\bar{\varphi}_0$	$\bar{\varphi}_1$	$\bar{w}_2$	φ_2	$\Delta\bar{\varphi}_2$
28	— 44	— 294	10	— 16
— 20	61	588	— 20	32
— 10	56	1032	— 10	64
— 5	40	1155	13	80
20	—124	—2604	20	— 158
— 1	1	1	1	— 2
—324	585	960	1053	—2412
— 0,3	0,6	1	1	— 2,5
—278,8	530,6	898,6	993,5	—2269,4
— 0,31	0,59	1	1,11	— 2,53
—277,06	527,03	895,12	992,18	—2261,42
— 0,309 523	0,588 781	1	1,108 432	— 2,526 388
—277,066	527,093	895,294	992,397	—2261,861
— 0,309 469	0,588 737	1	1,108 459	— 2,526 389
—277,063	527,089	895,290	992,396	—2261,854
— 0,309 467	0,588 735	1	1,108 463	— 2,526 393 = w_1
		895,290		

$3\varkappa_1 = 895{,}290$
$\varkappa_1 = 298{,}430$
$\bar{\lambda}_1^4 = 8{,}444\,19$
$\bar{\lambda}_1 = 1{,}704\,67$
exakt 1,701 50
Fehler 0,003 17 = 1,9‰

In Anbetracht der groben Unterteilung und des bescheidenen Rechenaufwandes dürfen die Ergebnisse als sehr gut bezeichnet werden.

(Eingegangen am 17. Januar 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *R. Zurmühl*, Darmstadt, Martinstr. 75.

Some Special Solutions for the Flexural Vibration of Discs of Varying Thickness

By H. D. Conway

1. Object of Investigation. The present investigation concerns the calculation of the frequencies of axisymmetrical vibration of discs whose flexural rigidity D varies with the radius r according to the law $D = D_0 r^m$, where D_0 and m are constants. Although it was not found possible to easily solve the problem for arbitrary m, some particular solutions in terms of *Bessel* functions were found for a number of positive values of m and corresponding values of *Poisson*'s ratio ν. Although these solutions have limited practical value, they are nevertheless exact and hence can be used to assess the accuracy of results obtainable by approximate methods. Numerical results are obtained for plates having a clamped edge. Other investigations relating to this topic have previously been given by the author[1, 2].

2. Development of differential equation. The differential equation to be solved is[3]

$$D \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) + \frac{\partial D}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) = -\frac{1}{r}\int^r \varrho\, h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\, r\, dr\,, \tag{1}$$

where w is the deflection at radius r, D is the flexural rigidity, h is the thickness, ϱ is the density and ν is *Poisson's* ratio.

In order to obtain equations which are tractable, we tentatively write the flexural rigidity D as proportional to a power of the radius r and hence $D = D_0 r^m$, where $D_0 = E h_0^3/12\,(1-\nu^2)$ and m are constants. Thus the thickness h of the disc is given by $h = h_0 r^{m/3}$. Equation (1) then becomes

$$r^4 \frac{\partial^4 w}{\partial r^4} + r^3 (2m+2) \frac{\partial^3 w}{\partial r^3} + r^2 (m + \nu m - 1 + m^2) \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + r (1 + \nu m^2 - \nu m - m) \frac{\partial w}{\partial r}$$
$$= -\frac{12 \varrho (1-\nu^2)}{E h_0^2} r^{(12-2m)/3} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\,. \tag{2}$$

For vibrations, we further write

$$w = f(r)\, e^{i p t} \tag{3}$$

and hence obtain the following equation for $f(r)$:

$$r^4 \frac{d^4 f}{dr^4} + r^3 (2m+2) \frac{d^3 f}{dr^3} + r^2 (m + \nu m - 1 + m^2) \frac{d^2 f}{dr^2} + r (1 + \nu m^2 - \nu m - m) \frac{df}{dr}$$
$$- \frac{12 \varrho p^2 (1-\nu^2)}{E h_0^2} r^{(12-2m)/3} f = 0\,. \tag{4}$$

The solution of this equation will now be examined.

3. Solution of differential equation. The general solution of Equation (4) is obviously difficult to obtain. However, consider the following equation given in the book by *Kamke*[4]

$$r^4 \frac{d^4 f}{dr^4} + A_3 r^3 \frac{d^3 f}{dr^3} + A_2 r^2 \frac{d^2 f}{dr^2} + A_1 r \frac{df}{dr} + A_0 f = 0\,, \tag{5}$$

where

$$A_3 = 6 - 4a - 4c\,,$$
$$A_2 = 2(a^2 - \mu^2 c^2) + 4(a + c - 1)^2 + 4(a-1)(c-1) - 1\,,$$
$$A_1 = [2(\mu^2 c^2 - a^2) - (2a-1)(2c-1)]\,(2a + 2c - 1)\,,$$
$$A_0 = (a^2 - \mu^2 c^2)(a^2 + 4ac + 4c^2 - \mu^2 c^2) - b^4 c^4 r^{4c}\,.$$

Its solution is

$$f = r^a [C_1 J_\mu(u) + C_2 Y_\mu(u) + C_3 J_\mu(i u) + C_4 Y_\mu(i u)]\,, \quad \text{with } u = b r^c\,. \tag{6}$$

---

[1] *H. D. Conway*, J. Appl. Mech., June (1955) p. 275.
[2] *H. D. Conway*, Z. angew. Math. Mech. 37 (1957) p. 406.
[3] *S. Timoshenko*, Theory of Plates and Shells, p. 283, New York 1940.
[4] *E. Kamke*, Differentialgleichungen, p. 534, Leipzig 1943.

Writing $a = \mu c = -m/3$, $c = 1 - m/6$, $\mu = 2m/(m-6)$, Equation (5) becomes

$$r^4 \frac{d^4 f}{dr^4} + r^3 (2m+2) \frac{d^3 f}{dr^3} + r^2 \left(\frac{11 m^2}{9} + \frac{2m}{3} - 1 \right) \frac{d^2 f}{dr^2} + r \left(1 + \frac{2m}{3} \right) \left(1 - \frac{m}{3} \right) (1-m) \frac{df}{dr} - b^4 \left(1 - \frac{m}{6} \right)^4 r^{(12-2m)/3} f = 0 . \tag{7}$$

Further, writing *Poisson*'s ratio $\nu = (2m-3)/9$ in Equation (4), we obtain

$$r^4 \frac{d^4 f}{dr^4} + r^3 (2m+2) \frac{d^3 f}{dr^3} + r^2 \left(\frac{11 m^2}{9} + \frac{2m}{3} - 1 \right) \frac{d^2 f}{dr^2} + r \left(1 + \frac{2m}{3} \right) \left(1 - \frac{m}{3} \right) (1-m) \frac{df}{dr} - \frac{12 \varrho p^2 (1-\nu^2)}{E h_0^2} r^{(12-2m)/3} f = 0 . \tag{8}$$

Equations (7) and (8) are identical if $b^4 (1 - m/6)^4 = 12 \varrho p^2 (1-\nu^2)/E h_0^2$ and $\nu = (2m-3)/9$. Considerable restriction is thus placed on the solution when it is remembered that ν must lie in the range $0 - 1/2$. However, the results will show the effect of certain tapers on the frequencies of vibration and, since they are exact, they may be used to test the accuracy of results obtained from approximate methods developed to investigate the vibration of more practical discs. The following special cases are now considered.

4. Special cases. a) $m = 2$, $\nu = 1/9$. The solution of Equation (4) is here

$$f = r^{-2/3} [C_1 J_{-1}(u) + C_2 Y_{-1}(u) + C_3 J_{-1}(iu) + C_4 Y_{-1}(iu)], \quad \text{with } u = b r^{2/3} \text{ and } b^4 = \frac{60 \varrho p^2}{E h_0^2} . \tag{9}$$

For a solid disc we note that the second and fourth terms in parentheses are singular at $r = 0$. Hence $C_2 = C_4 = 0$ and, since $J_{-1}(u) = J_1(u)$, $J_{-1}(iu) = i I_1(u)$, we write with no loss of generality

$$f = r^{-2/3} [B_1 J_1(u) + B_2 I_1(u)] . \tag{10}$$

For a solid disc clamped at its outer radius $r = r_0$, it follows that the equation for the determination of the circular frequencies p is

$$\frac{J_1'(u_0)}{J_1(u_0)} = \frac{I_1'(u_0)}{I_1(u_0)} , \qquad \text{with} \quad u_0 = b r_0^{2/3}, \qquad \text{and} \quad b^4 = \frac{60 \varrho p^2}{E h_0^2} , \tag{11}$$

the primes denoting differentiation with respect to r. It is interesting to note that this is also the equation the finding of the first root of which is necessary to determine the frequency of a uniform thickness disc vibrating with one nodal diameter and no nodal circles, that is, the second harmonic of the disc.

The first ten roots of Equation (11) have been tabulated by Airey [1], the first root being $u_0^4 = 450.4$. The fundamental period for the varying-thickness disc is then found and, denoting the thickness at the outer edge by H, is given by

$$\frac{2\pi}{p} = \frac{32 \pi a^2}{H} \frac{1}{35.79} \sqrt{\frac{2 \varrho}{3 E}} . \tag{12}$$

The corresponding result for a constant thickness disc has, for $\nu = 1/9$, factor of 38.74 instead of 35.79, and it follows that the ratio of the fundamental period of the variable ($D = D_0 r^2$) to the constant thickness, clamped-edge disc is 1.08.

b) $m = 18/7$, $\nu = 5/21$. The solution for this case is

$$f = r^{-6/7} [C_1 J_{-3/2}(u) + C_2 Y_{-3/2}(u) + C_3 J_{-3/2}(iu) + C_4 Y_{-3/2}(iu)], \quad u = b r^{4/7}, \quad b^4 = \frac{637 \varrho p^2}{6 E h_0^2} . \tag{13}$$

For a solid disc, the first and third terms in parentheses are singular at the center, and noting that

$$Y_{-3/2}(u) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \left(\frac{-\sin u}{u} + \cos u \right), \qquad Y_{-3/2}(iu) = \sqrt{\frac{2}{\pi u}} \left(\frac{-\sinh u}{u} + \cosh u \right) \tag{14}$$

the expression for f may be written in closed form. For a clamped disc of radius r_0 this leads to the frequency equation

$$u_0 (\tan u_0 + \tanh u_0) = 2 \tan u_0 \tanh u_0 , \qquad \text{with} \quad u_0 = b r_0^{4/7} \quad \text{and} \quad b^4 = \frac{637 \varrho p^2}{6 E h_0^2} . \tag{15}$$

The first root of this equation is $u_0 = 5.27$, the fundamental period is found and, denoting the thickness at the outer radius by H, is given by

$$\frac{2\pi}{p} = \frac{32 \pi a^2}{H} \frac{1}{35.21} \sqrt{\frac{2 \varrho}{3 E}} . \tag{16}$$

[1] *J. R. Airey*, Proc. Phys. Soc. London 23 (1911) pp. 227, 231, 232.

The corresponding result for a constant thickness disc has, for $\nu = 5/21$, a factor of 39.65 instead of 35.21, and thus the ratio of the fundamental period of the variable ($D = D_0 r^{18/7}$) to the constant thickness, clamped-edge disc is 1.13.

c) $m = 3$, $\nu = 1/3$. This particular case has been discussed before by the author[1] as presenting an interesting analogy between the symmetrical vibrations of a disc of linearly varying thickness and a cone. We quote the results here. The solution is

$$f = r^{-1}[C_1 J_{-2}(u) + C_2 Y_{-2}(u) + C_3 J_{-2}(i u) + C_4 Y_{-2}(i u)], \quad \text{with } u = b r^{1/2} \text{ and } b^4 = \frac{512 \varrho p^2}{3 E h_0^2}. \tag{17}$$

The equation for the determination of the frequencies is

$$J_2(u_0)\, I_1(u_0) = J_1(u_0)\, I_2(u_0) \qquad \text{with} \quad u_0 = b\, r_0^{1/2}. \tag{18}$$

The first root is $u_0 = 5.906$ and the fundamental period is

$$\frac{2\pi}{p} = \frac{32\pi a^2}{H} \frac{1}{34.88} \sqrt{\frac{2\varrho}{3E}}. \tag{19}$$

The corresponding result for a constant thickness disc has, for $\nu = 1/3$, a factor of 40.84 instead of 34.88, and thus the ratio of the fundamental period of the variable ($D = D_0 r^3$) to the constant thickness, clamped-edge disc is 1.17.

d) $m = 6$, ν arbitrary. The writing of $m = 6$ in Equation (4) makes the latter homogeneous, and with the transformation $r = e^z$, the equation becomes

$$\frac{d^4 f}{dz^4} + 8\frac{d^3 f}{dz^3} + 2(5 + 3\nu)\frac{d^2 f}{dz^2} - 24(1 - \nu)\frac{df}{dz} - \frac{12\varrho p^2 (1 - \nu^2)}{E h_0^2} f = 0. \tag{20}$$

It is then necessary to find the roots of the quartic characteristic equation

$$\lambda^4 + 8\lambda^3 + 2(5 + 3\nu)\lambda^2 - 24(1 - \nu)\lambda - K = 0 \quad \text{with} \quad K = \frac{12\varrho p^2 (1 - \nu^2)}{E h_0^2}. \tag{21}$$

The above equation may be written in the form

$$(\lambda + 2 + \beta_1)(\lambda + 2 - \beta_1)(\lambda + 2 + \beta_2)(\lambda + 2 - \beta_2) = 0 \tag{22}$$

whence, by multiplication and comparison with Equation (21), it may be shown that

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 = 14 - 6\nu, \qquad (\beta_1^2 - \beta_2^2)^2 = 36(1 - \nu)^2 + 4K. \tag{23}$$

Thus the roots of the characteristic equation are

$$\gamma_{1,2} = -2 \pm \sqrt{7 - 3\nu + \sqrt{9(1 - \nu)^2 + K}}, \qquad \gamma_{3,4} = -2 \pm \sqrt{7 - 3\nu - \sqrt{9(1 - \nu)^2 + K}} \tag{24}$$

and the equation for f is

$$f = A r^{\gamma_1} + B r^{\gamma_2} + C r^{\gamma_3} + D r^{\gamma_4}. \tag{25}$$

However, it will be noted that since $z = \log r$, which is singular at $r = 0$, the above solution is valid only for a disc with a hole. If the vibrations of a disc with a clamped outer and free inner edge are investigated, it is found, as might be imagined, that the frequency decreases indefinitely with decrease in the radius of the hole.

5. Summary. The free, flexural, axisymmetrical vibrations of a clamped circular disc having a flexural rigidity given by $D = D_0 r^m$ have been investigated, solutions in terms of *Bessel* functions being found for certain values of m and *Poisson*'s ratio ν. Values of the ratio of the fundamental period T of the varying thickness discs to the fundamental period T_0 of corresponding constant thickness discs having the same value of *Poisson*'s ratio have been computed, and are tabulated below

m	ν	T/T_0
2	1/9	1.08
$2^4/_7$	5/21	1.13
3	1/3	1.17

The case of $m = 6$ (parabolic variation of thickness) and arbitrary ν has also been investigated.

(Eingegangen am 25. Januar 1958.)

Anschrift des Verfassers: Prof. *H. D. Conway*, Ithaca, N. Y. (USA), Cornell University.

[1] Vide reference in footnote 2 on page 408.

Überschallströmung am Austritt von Turbinenschaufel-Kränzen

Von **H. Hausenblas**

1. Einleitung. Wie *Stodolas* Übersicht[1] zeigt, wurden die Dampfturbinenbauer schon bald zum Studium der Beschleunigung einer Strömung auf Überschallgeschwindigkeiten im Austrittsdreieck von Turbinenbeschaufelungen angeregt. Eine kurze, ziemlich vollzählige Zusammenstellung der verschiedenen Arbeiten gab kürzlich *Linnecken*[2]. Hierin nicht enthalten ist eine neuere Arbeit von *Traupel*[3], die einen wesentlichen Beitrag zum Verständnis der eindimensionalen Rechnung dieses Vorganges enthält.

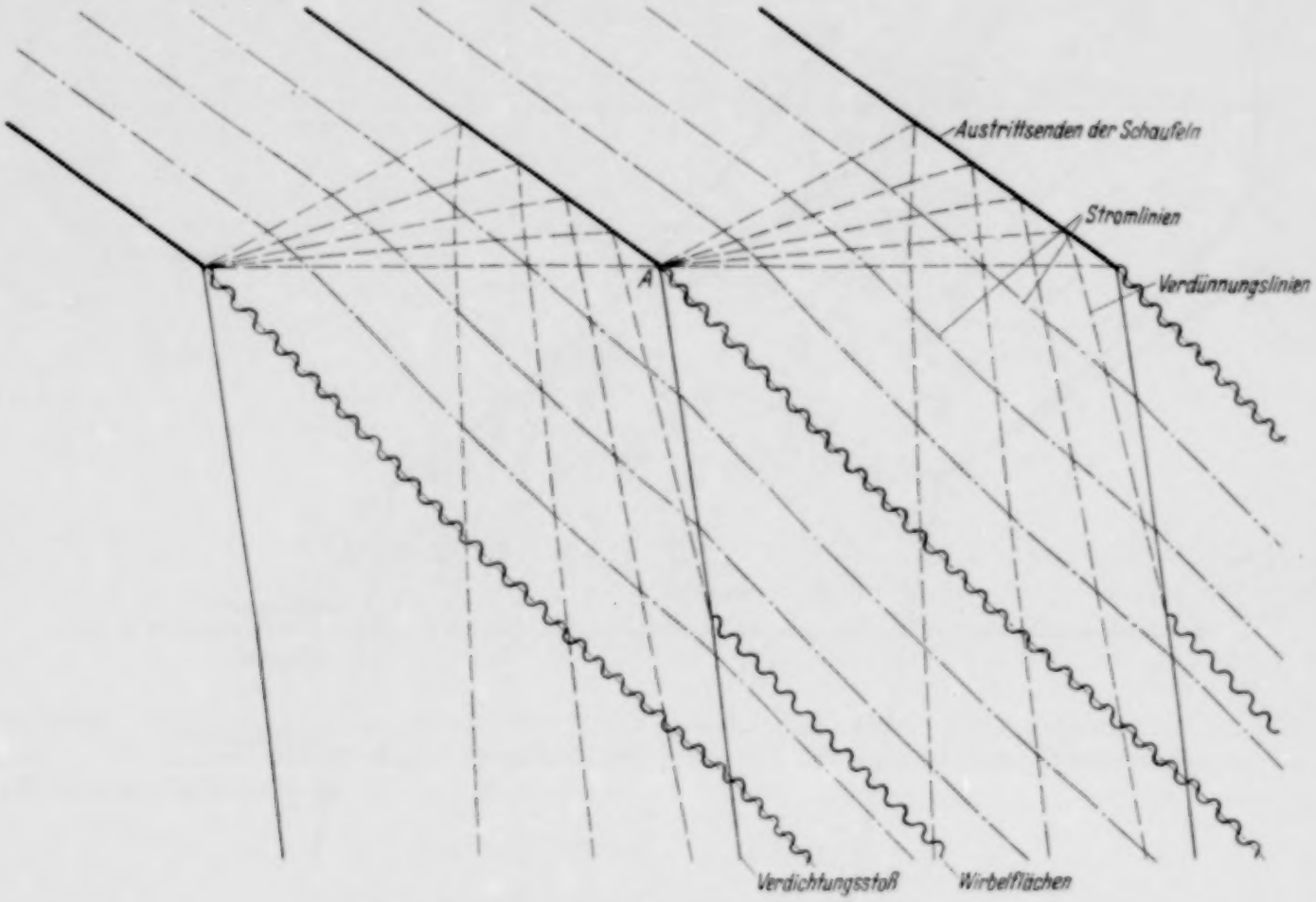


Abb. 1. Überschallströmung hinter einem Streckenprofilgitter.

Hier soll das Problem nur für den Fall erörtert werden, daß die (Überschall-)Strömung auch hinter dem Austrittsdreieck der Beschaufelung durch zwei koaxiale Zylinder begrenzt wird (innen Nabe, außen Turbinengehäuse[4]). Nach der üblichen Abwicklung des betrachteten Zylinderschnittes der vollbeaufschlagten Axialbeschaufelung in ein gerades Schaufelgitter ist also ebene Strömung vorauszusetzen.

Bei der Auslegung von Turbinen interessiert man sich praktisch nur für die auftretenden Austrittsablenkungen. Einfache und bequeme Berechnungsmethoden hierfür erhält man aus einer eindimensionalen Behandlung der Überschallströmung im dreiecksförmigen Austrittsabschnitt eines Beschleunigungsgitters. Für das nähere Verständnis dieser Strömungsvorgänge ist aber eine

---

[1] *A. Stodola*, Dampf- und Gasturbinen, Berlin 1924.
[2] *H. Linnecken*, AEG-Mitt. 47 (1957) S. 44.
[3] *W. Traupel*, Die Strahlablenkung in der vollbeaufschlagten Turbine, Mitt. Inst. f. Therm. Turbomasch. ETH Zürich Nr. 3, Zürich 1956.
[4] *H. Hausenblas*, Energie 10 (1958) S. 131.

zweidimensionale Betrachtung erforderlich. Die Darstellung von *Flügel*[1] ist nicht ganz korrekt, wie ich zeigen konnte. Auch *Meyer*[2] gibt mehr anschauliche als exakt begründete Darlegungen.

2. Anwendung des Charakteristikenverfahrens. Eine exakte zweidimensionale Behandlung des Überschall-Strömungsfeldes im Austrittsdreieck ist für ebene, reibungsfreie Strömungen mittels des *Prandtl-Busemann*schen Charakteristikenverfahrens möglich[3]. Abb. 1 zeigt nochmals das von mir erhaltene Ergebnis. Es wurde berücksichtigt, daß sich die aus den einzelnen Schaufelkanälen kommenden Strömungen hinter den Austrittsdreiecken zu einem geschlossenen ebenen Strömungsfeld vereinigen, diese sich also gegenseitig beeinflussen. Damit die Strömung dem ebenen Schaufelrücken folgen kann, werden die von der Schaufelhinterkante *A* ausgehenden Verdünnungslinien am Schaufelrücken der Nachbarschaufel reflektiert und laufen aus dem Austrittsdreieck stromabwärts heraus. Diese Reflexion bedingt den Unterschied der Strömung im Austrittsdreieck von der Strömung um eine konvexe Ecke nach *Prandtl-Meyer*[4]. Längs des Schaufelrückens tritt

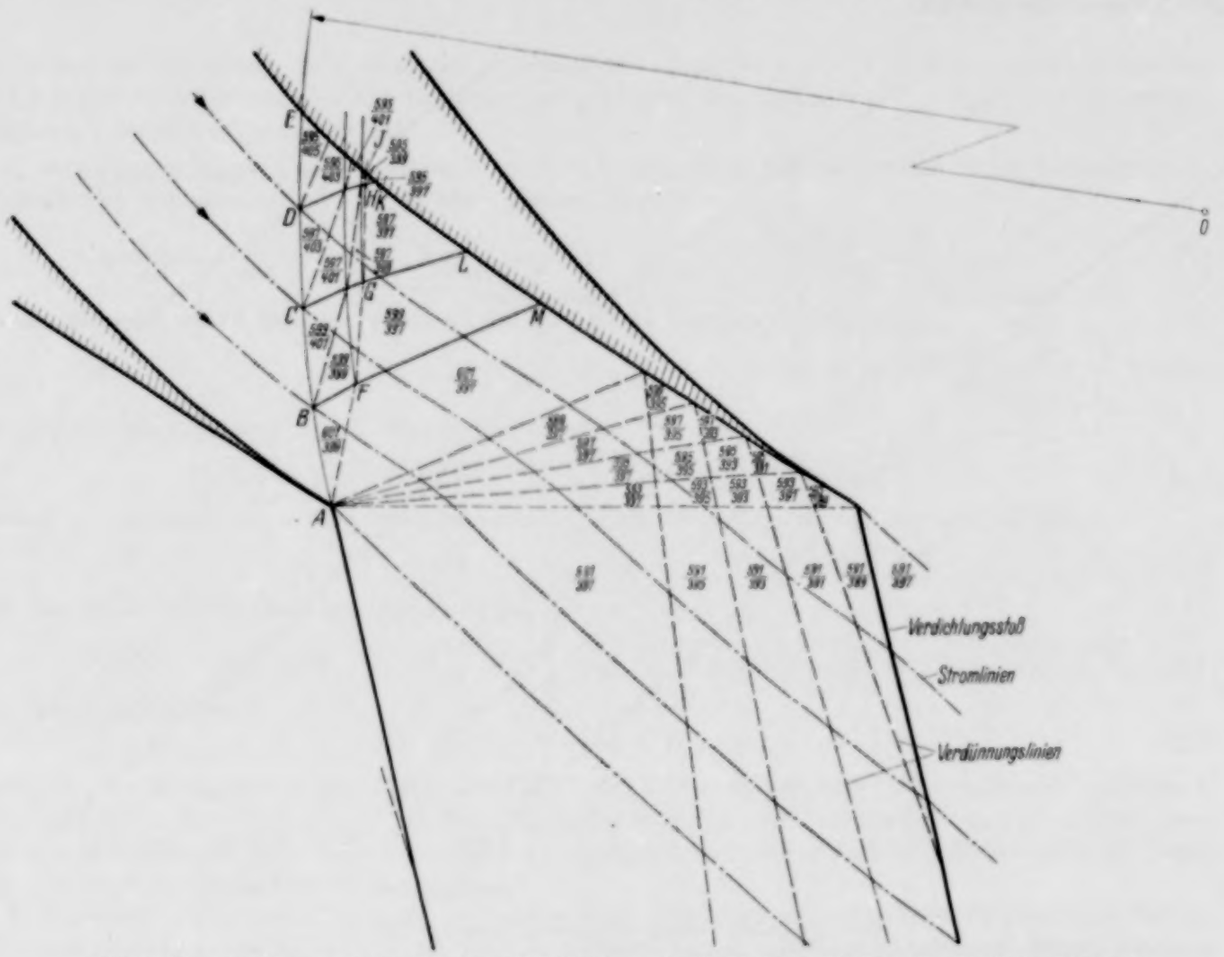


Abb. 2. Überschallströmung hinter einem speziellen Gitteraus gekrümmten dicken Profilen mit scharfer Austrittskante.

eine stärkere Expansion ein. Da hierdurch die Strömungen zu beiden Seiten der Schaufelhinterkante verschiedene *Mach*zahlen und verschiedene Abströmrichtungen aufweisen, müßten sie einander durchdringen. Dies wird vermieden, indem von der Schaufelhinterkante ein Verdichtungsstoß ausgeht, der die Überexpansion der Strömung längs des Schaufelrückens (verlustbehaftet) rückgängig macht[5]. Dieser Verdichtungsstoß hört aber nicht, wie *Meyer* vermutet, mitten im Strömungsfeld auf, sondern läuft mit (durch die Einmündung der Verdünnungslinien) abnehmender Stärke stromab. Die Abströmung des Gitters durchquert die von den verschiedenen Schaufelhinterkanten ausgehenden Verdichtungsstöße, wobei die Stoßstärke von Kreuzungsstelle

[1] *G. Flügel*, Die Dampfturbinen, S. 67, Leipzig 1931.
[2] *H. Meyer*, Z. VDI 97 (1955) S. 294.
[3] Siehe Fußnote 4 von S. 411.
[4] *R. Sauer*, Theoretische Einführung in die Gasdynamik, S. 58 und S. 108, Berlin 1951.
[5] Die Isentropie der Strömung endet natürlich an Verdichtungsstößen.

zu Kreuzungsstelle abnimmt. Dieses Ergebnis ist insoweit noch unbefriedigend, als ein Streckenprofilgitter vorausgesetzt werden mußte, dessen „Schaufelkanäle" mit Schallgeschwindigkeit durchströmt werden. Bei der Wahl anderer Schaufelformen mit beschleunigter Strömung liegt die Schwierigkeit in der Berechnung der schallnahen Unterschallströmung und der Festlegung der Linie, auf der die Schallgeschwindigkeit durchschritten wird (Schall-Linie).

Um wenigstens ein Beispiel für eine allgemeinere Schaufelkanalform zu erhalten, muß man bis zur Schall-Linie einen Ausschnitt aus einer bekannten beschleunigten Strömung mit Durchgang durch die Schallgeschwindigkeit benützen. Für Abb. 2 wurde eine Wirbelsenkenströmung (Mittelpunkt 0) gewählt, die durch Linearverbindung von Senkenströmung und Wirbelströmung

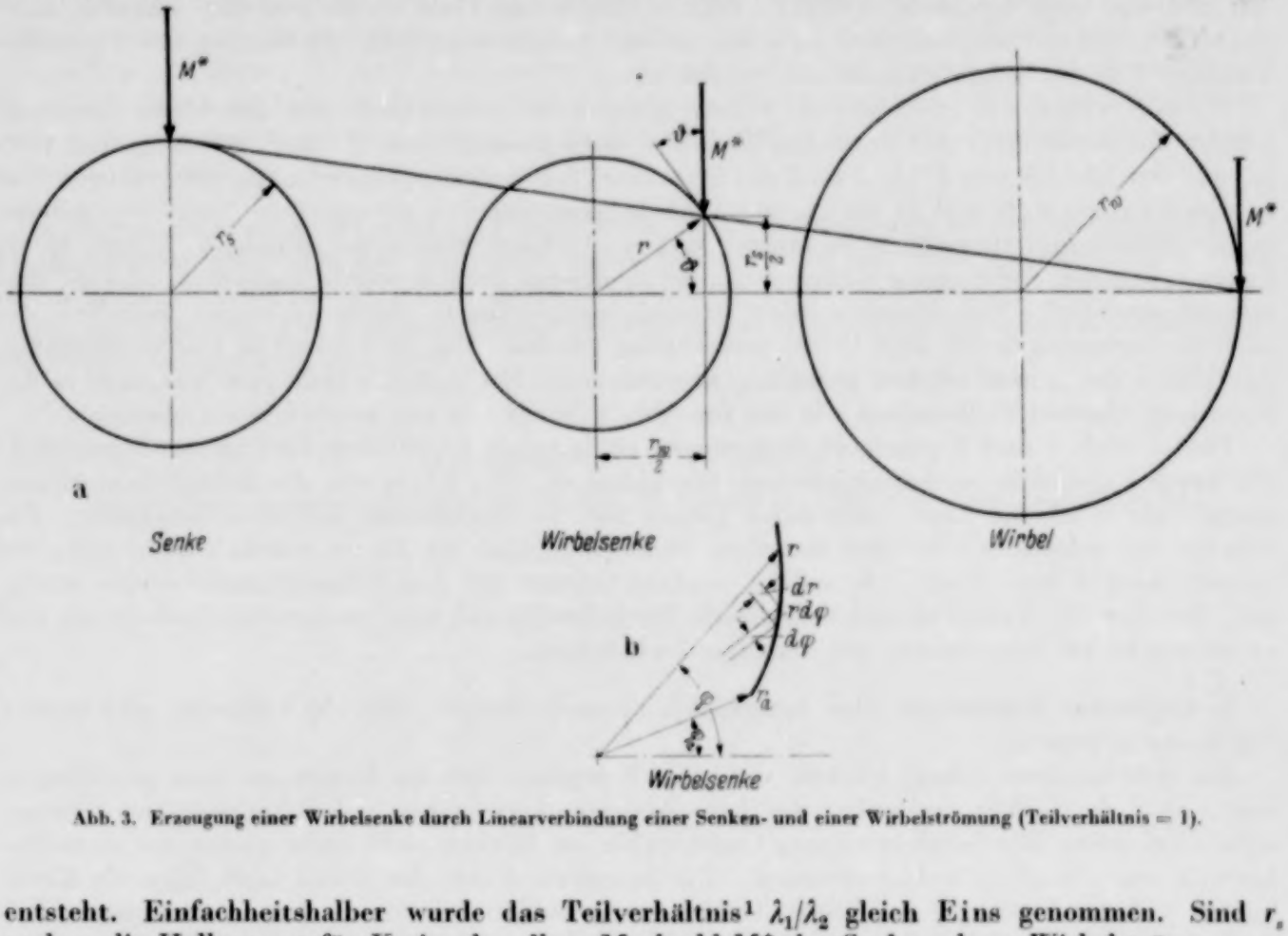


Abb. 3. Erzeugung einer Wirbelsenke durch Linearverbindung einer Senken- und einer Wirbelströmung (Teilverhältnis = 1).

entsteht. Einfachheitshalber wurde das Teilverhältnis[1] λ_1/λ_2 gleich Eins genommen. Sind r_s und r_w die Halbmesser für Kreise derselben *Mach*zahl M^* der Senken- bzw. Wirbelströmung, so erhält man nach Abb. 3a:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{r_s^2 + r_w^2}\,, \qquad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{r_s}{r_w}\,,$$

$$r_s = \frac{C_1}{\Theta}\,, \qquad r_2 = \frac{C_2}{M^*}\,.$$

wobei r der Halbmesser des Kreises der Wirbelsenkenströmung, auf dem die *Mach*zahl M^* herrscht, ϑ die Neigung des Geschwindigkeitsvektors gegenüber der Umfangsrichtung des genannten Kreises, M^* die *Mach*zahl bezogen auf die kritische Schallgeschwindigkeit, Θ die zu M^* gehörige Stromdichte, dimensionslos gemacht durch Bezugnahme auf ihren kritischen Wert, ist und C_1 sowie C_2 zwei Konstanten bedeuten. Für den Zentriwinkel φ der spiraligen Stromlinien ergibt sich (Abb. 3b):

$$\varphi - \varphi_a = \int_{r_a}^{r} \frac{dr}{r \operatorname{tg}\vartheta}\,;$$

der Index a kennzeichnet irgend einen Anfangswert.

Für Abb. 2[2] wurden die Kreise von Senke und Wirbel für $M^* = 1$ gleich groß gewählt, so daß die Stromlinien der Wirbelsenke diesen Kreis unter 45° schneiden. Der Zentriwinkel des benützten

[1] Siehe Fußnote 4 von S. 412.

[2] In Abb. 2 wurden gegenüber Abb. 1 die Wirbelschichten nicht mehr vermerkt.

Ausschnittes der Wirbelsenkenströmung (16°) konnte nicht beliebig groß gewählt werden. Es wurde stillschweigend angenommen, daß die Strömungszustände weiter stromauf (z. B. in der Umgebung der Schaufeleintrittskanten), die von der Wirbelsenkenströmung abweichen, letztere nicht beeinflussen, was bei engen Teilungen ausreichend zutrifft. Obwohl sich die berechnete Wirbelsenkenströmung bis zu einem Grenzradius in den Überschallbereich erstreckt, wurden die numerischen Ergebnisse nur für den entsprechenden Ausschnitt des Unterschallbereiches übernommen. Für die Fortsetzung der Strömung von der Schall-Linie in den Überschallbereich diente das *Prandtl-Busemann*sche Charakteristikenverfahren. Dabei wurde vom Überschallbereich der Wirbelsenkenströmung nur eine dreiecksförmiger Teil zwischen der kreisförmigen Schall-Linie *ABCDE* und dem Linienzug *AFGHJ* benützt. Die Schall-Linie wurde von der Schaufelhinterkante *A* ausgehend angenommen, da sonst ein mit Schallgeschwindigkeit durchströmter parallelwandiger Teil des Schaufelkanals aufgetreten wäre.

Da hier wegen der geschilderten Schwierigkeiten die Schall-Linie von vornherein festgelegt wurde, war damit die Form des Schaufelrückens auch stromab vom Punkt *E* weitestgehend festgelegt. Der Bereich von *E* bis *J* muß der Stromlinie der Wirbelsenkenströmung entsprechen. Um in den Punkten *B*, *C* und *D* die für die Wirbelsenkenströmung notwendigen Verdichtungslinien in die Schall-Linie einmünden zu lassen, muß der Schaufelrücken die Knicke *K*, *L* und *M* erhalten. Von der Anbringung weiterer Knicke in diesem Bereich wurde abgesehen, obwohl dies möglich erscheint. Von diesen würden stromab entsprechende *Mach*sche Linien ausgehen, die auch die Strömung hinter dem Gitter beeinflussen würden. Von *M* an wird in Übereinstimmung mit Abb. 1 der Schaufelrücken geradlinig angenommen. Die dadurch bedingten Vorgänge in der Strömung stimmen vollkommen mit den für Abb. 1 früher von mir beschriebenen überein[1].

Die in Abb. 1 und 2 gezeigten Strömungen entsprechen jeweils dem niedrigsten Gegendruck, der durch Expansion im Austrittsdreieck erreichbar ist. Die letzte von der Schaufelhinterkante ausgehende *Mach*sche Linie trifft dabei gerade auf die Hinterkante der Nachbarschaufel. Bei höheren Gegendrücken verbindet die letzte Verdünnungslinie im Austrittsdreieck nicht mehr die Austrittskanten benachbarter Schaufeln, sondern mündet auf dem Schaufelrücken weiter stromauf. Der von der Austrittskante ausgehende Verdichtungsstoß wird entsprechend schwächer und verschwindet bei Abströmung mit Schallgeschwindigkeit.

3. Allgemeine Ergebnisse. Das untersuchte spezielle Beispiel läßt die folgenden allgemeinen Ergebnisse erkennen:

Am gekrümmten Schaufelrücken von Abb. 2 ergeben sich im Gegensatz zum geradlinigen von Abb. 1 im Gebiet gegenüber der benachbarten Austrittskante *A* bekanntermaßen Übergeschwindigkeiten. Der Schalldurchgang findet daher am Rücken nicht mehr querab zur Austrittskante *A* statt, sondern weiter stromauf. Die besondere Form der Schall-Linie (hier ein Kreisbogen) und der Strömung im Gebiet *AEM* hängt von den besonderen Annahmen unseres Beispieles ab, sind also nicht allgemein gültig. Hierzu gehört auch die Tatsache, daß die Krümmung des Schaufelrückens in der Umgebung von *J* am größten ist. Die in Abb. 1 gezeigte Strömung im Austrittsdreieck findet sich in Abb. 2 unverändert wieder. Dies wäre allerdings nicht mehr der Fall, wenn, wie oben erwähnt, die Krümmung des Schaufelrückens im Bereich *J* bis *M* anders gewählt worden wäre, so daß von diesem Bereich zusätzliche *Mach*sche Linien ausgehen, die dann auch die Strömung hinter dem Gitter beeinflussen würden.

Wie schon erwähnt, würde im Normalfall des hier behandelten Problems nicht die Form der Schall-Linie, sondern die Gestalt der Schaufelkontur (vor allem des Schaufelrückens) vorgegeben sein. Die Bestimmung der zugehörigen Strömung (insbes. der Schall-Linie) stößt aber auf erhebliche Schwierigkeiten.

Das Beispiel Abb. 2 enthält ferner die Beschränkung auf eine scharfe Hinterkante. Bei reibungsfreiem Gas wäre hinter einer dicken Austrittskante (z. B. mit halbkreisförmigem Ende) eine gemischte Überschall-Unterschall-Strömung zu erwarten. Die Strömung würde sich bei Umströmung des konvexen Teiles der Austrittskante auf höhere (Überschall-)Geschwindigkeiten beschleunigen, um sich dann in zwei schräg ablaufenden Verdichtungsstößen wieder zu verlangsamen. Der dem Austrittsdreieck abgewandte Verdichtungsstoß würde sich wahrscheinlich mit dem von der Schaufelaustrittskante ausgehenden Verdichtungsstoß der Abb. 1 und 2 zu einem einzigen Stoß vereinigen. Eine genaue Untersuchung dieser Strömung bereitet wegen ihres transsonischen Charakters Schwierigkeiten und lohnt nicht, da sich bei den wirklichen, reibungsbehafteten Gasen die Strömung von einer solchen dicken Hinterkante ablöst. Es entsteht ein Nachlaufgebiet.

[1] Siehe Fußnote 4 von Seite 411.

Dies erkennt man deutlich in den Schlierenaufnahmen[1] von *Luksch* und *Quick*[2]. Dort sieht man auch, daß trotz der Ausbildung einer Nachlaufzone, wie oben beschrieben von den dicken Schaufelaustrittskanten jeweils zwei Verdichtungsstöße ausgehen. Dies läßt vermuten, daß die Nachlaufzonen kurz hinter den Schaufelaustrittskanten schmäler als diese sind.

Eine für die Anwendung in der Praxis ausreichend einfache Berechnung des vergleichmäßigten Überschall-Strömungszustandes weit hinter dem Gitter auf Grund der hier gezeigten Untersuchungen dürfte wohl kaum möglich sein. Dort wird man sich also nach wie vor mit den eindimensionalen Rechnungen begnügen müssen. Wie die Versuchsergebnisse von *Wewerka* und *Schmidt*[3] zeigen, genügen diese in der Regel den von der Praxis gestellten Anforderungen. Allerdings bestehen Schwierigkeiten in der Berechnung des niedrigsten, durch Expansion im Austrittsdreieck erreichbaren Gegendruckes, wie ein Vergleich mit den diesbezüglichen Darlegungen von *Traupel*[4] zeigt. Dieser Nachteil wird dadurch abgeschwächt, daß (zumindest in der isentropen Näherung) bereits oberhalb dieses Gegendruckes jener Punkt erreicht wird, wo bei Steigerung des an die Turbine angelegten isentropen (adiabat.) Gefälles die Wellenleistung wieder abzunehmen beginnt[5].

4. Zusammenfassung. Es wird die reibungsfreie Überschallströmung im Austrittsdreieck eines Beschleunigungsgitters für den Fall eines Streckenprofilgitters und eines speziellen Gitters aus gekrümmten, dicken Profilen, jedoch mit scharfer Austrittskante, mit Hilfe des Charakteristikenverfahrens ermittelt. Der Fall einer dicken Austrittskante und die eindimensionalen Näherungsrechnungen werden kurz diskutiert.

(Eingegangen am 22. Februar 1958.)

Anschrift des Verfassers: Privatdozent Dr.-Ing. *H. Hausenblas*, Dudweiler (Saar) Gärtnerstr. 2a.

[1] Diese Aufnahmen wurden auf dem vom Verfasser erstellten Überschall-Gitterwindkanal der SNECMA/Paris erhalten. Bei der Auswertung dieser Schlierenaufnahmen ist zu beachten, daß meist unterhalb des freiliegenden Schaufelkanals nur mehr ein weiterer folgt. An der Strahlgrenze dieses Schaufelkanals werden bei diesen Versuchen die Verdichtungsstöße reflektiert, was im ringförmiegn zusammenhängenden Strömungskanal einer Turbomaschine nicht auftritt.

[2] *W. Luksch* u. *A. W. Quick*, Bullet. Assoc. Techn. Marit. et Aéron., Session 1953.

[3] *Wewerka* u. *Schmidt*, Untersuchung von Lavaldüsen und Mündungen; Forschungsber. 1409 d. Deutsch. Luftfahrtforschg.

[4] Siehe Fußnote 3 von Seite 411.

[5] Siehe Fußnote 4 von Seite 411.

Stationäre Wärmespannungen mit temperaturabhängigen Stoffwerten

Von **R. Trostel**

1. Allgemeines. Als Ergänzung meiner früheren Arbeit[1], in der das Problem der Berechnung stationärer Wärmespannungen im mittleren Bereich eines langen Hohlzylinders aus elastisch-inkompressiblem Material untersucht worden ist, wird nachfolgend der Weg einer allgemeinen Lösung stationärer Wärmespannungsprobleme bei temperaturabhängigen Stoffwerten E, α_t und λ und für beliebige, jedoch mit der Temperatur nicht veränderliche Querkontraktionswerte ν aufgezeigt. Ausgehend von der allgemeinen thermisch-elastischen Verschiebungsgleichung wird, nachdem man den Verschiebungsvektor nach einem, die Temperaturveränderlichkeit des Elastizitätsmoduls E enthaltenden Parameter entwickelt hat, ein System von Differentialgleichungen für die einzelnen Glieder der den Verschiebungsvektor darstellenden Funktionenreihe gefolgert. Dieses Differentialgleichungssystem ist rekursiv lösbar, sofern das Temperaturfeld und die Temperaturabhängigkeiten $E = E(\vartheta)$ und $\alpha_t = \alpha_t(\vartheta)$ des Elastizitätsmoduls und des Wärmeausdehnungskoeffizienten vorgegeben sind. Zur Ermittlung des Temperaturfeldes gehen wir vom *Fourier*schen Theorem aus, und erhalten aus der Wärmemengenbilanz am Körperelement bei Beachtung der Temperaturveränderlichkeit der Wärmeleitzahl λ eine nichtlineare Differentialgleichung für das Temperaturfeld ϑ, die jedoch (für beliebige $\lambda(\vartheta)$) vermöge einer geeigneten Transformation auf eine lineare Differentialgleichung zurückgeführt werden kann.

Im Anschluß an diese in Ziff. 2 und 3 dargestellten Untersuchungen folgen in Ziff. 4 zwei Beispiele, wovon vor allem das zweite, die Stabbiegung bei gleichzeitiger Erwärmung, von Bedeutung ist. Man erkennt hier, daß man auch im Falle der Temperaturabhängigkeit des Elastizitätsmoduls die *Bernoulli*sche Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte aufrechterhalten kann, und daß in jedem statisch bestimmt gelagerten Stabe bei ungleichmäßiger Erwärmung Temperaturspannungen entstehen. Sie sind jedoch in der Regel geringfügig.

Das andere Beispiel behandelt wieder den Hohlzylinder. Hier bestätigen sich die Ergebnisse, die der Verfasser in dem bereits erwähnten Aufsatz vorausgesagt hatte: Die tatsächlichen Wärmespannungen in einem Stahlrohr sind größer als diejenigen, die sich unter der Voraussetzung unveränderlicher, bei Zimmertemperatur vorhandener Materialwerte ergeben. Für die tatsächliche Wärmespannungsverteilung wurden hinreichend genaue Näherungsformeln hergeleitet. Mit ihrer Hilfe erkennt man außerdem, daß man den Einfluß der Temperaturveränderlichkeit der Stoffwerte E und α_t ziemlich genau auch mittels der Theorie unveränderlicher, für eine mittlere Systemtemperatur ϑ_m gültiger Materialwerte E_m und α_{tm} erfassen kann, sofern die Temperaturunterschiede innerhalb des Systems nicht extrem groß sind.

2. Die Ermittlung des Spannungs- und Verschiebungszustandes. Wir setzen zunächst eine beliebige Temperaturveränderlichkeit des Elastizitätsmoduls E und der Wärmeausdehnungszahl α_t voraus. Die Querdehnung ν wird nicht als temperaturabhängig angesehen. Die maßgebenden Gleichungen sind die Gleichgewichtsbedingungen für das Körperelement, die mit dem Spannungstensor $\mathfrak{S}$ und den auf die Volumeneinheit bezogenen Massenkräften $\mathfrak{k}$ die Form

$$\nabla \mathfrak{S} + \mathfrak{k} = 0 \tag{1}$$

annehmen, sowie die durch die Temperaturdehnungen erweiterten *Hooke*schen Gesetze, die man in der Form

$$\mathfrak{S} = \frac{E(\vartheta)}{1+\nu}\left| \mathfrak{D} + \left(\frac{\nu}{1-2\nu} \nabla \mathfrak{u} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \int_0^{\vartheta} \alpha_t(t)\, dt \right) \mathfrak{E} \right| \tag{2}$$

schreiben kann, wobei mit dem Verschiebungsvektor $\mathfrak{u}$

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2} (\nabla \circ \mathfrak{u} + \mathfrak{u} \circ \nabla) \tag{3}$$

der Verzerrungstensor[2], $\mathfrak{E}$ der Einheitstensor und ϑ die Temperatur gegenüber dem spannungslosen Ausgangszustand sind.

[1] *R. Trostel*, Ing.-Arch. 26 (1958) S. 134.

[2] Das Zeichen $\circ$ bedeutet die dyadische Multiplikation.

Einsetzen von (2) in (1) liefert die Verschiebungsgleichung des Problems:

$$\nabla\left[\mathfrak{D}+\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\nabla\mathfrak{u}-\frac{1+\nu}{1-2\nu}\int_0^\vartheta\alpha_t\,dt\right)\mathfrak{E}\right]$$
$$+\frac{1}{E}(\nabla E)\left[\mathfrak{D}+\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\nabla\mathfrak{u}-\frac{1+\nu}{1-2\nu}\int_0^\vartheta\alpha_t\,dt\right)\mathfrak{E}\right]+\frac{1+\nu}{E}\mathfrak{k}=0\,. \tag{4}$$

Nun ist

$$\nabla\mathfrak{D}=\frac{1}{2}\nabla[\nabla\circ\mathfrak{u}+\mathfrak{u}\circ\nabla]=\frac{1}{2}[(\nabla\nabla)\mathfrak{u}+(\nabla\mathfrak{u})\nabla]=\frac{1}{2}[\triangle\mathfrak{u}+\nabla(\nabla\mathfrak{u})]\,,$$

$$\nabla[(\nabla\mathfrak{u})\mathfrak{E}]=\nabla(\nabla\mathfrak{u})\mathfrak{E}=\nabla(\nabla\mathfrak{u})\,,\qquad\nabla\left[\left(\int_0^\vartheta\alpha_t\,dt\right)\mathfrak{E}\right]=\nabla\int_0^\vartheta\alpha_t\,dt\,,$$

und setzt man

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{d\vartheta}=\frac{d}{d\vartheta}\left[\ln\frac{E}{E_0}\right]=\varepsilon\,\Phi(\vartheta)\,, \tag{5a}$$

wobei ε ein die Konstanten des Materialgesetzes $E=E(\vartheta)$ enthaltender Parameter ist, so daß sich also

$$\frac{1}{E}(\nabla E)=\frac{1}{E}\frac{dE}{d\vartheta}\nabla\vartheta=\varepsilon\,\Phi(\vartheta)\nabla\vartheta=\varepsilon\,\mathfrak{x}\,,\qquad\mathfrak{x}=\Phi\nabla\vartheta \tag{5b}$$

ergibt, so folgt schließlich aus (4) die Relation[1]

$$\triangle\mathfrak{u}+\frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\mathfrak{u})+\varepsilon\left[(\mathfrak{x}\nabla)\overset{\downarrow}{\mathfrak{u}}+(\mathfrak{x}\overset{\downarrow}{\mathfrak{u}})\nabla+\frac{2\nu}{1-2\nu}\mathfrak{x}(\nabla\mathfrak{u})-\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\mathfrak{x}\int_0^\vartheta\alpha_t\,dt\right]$$
$$-\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\nabla\int_0^\vartheta\alpha_t\,dt+\frac{2(1+\nu)}{E}\mathfrak{k}=0\,, \tag{6}$$

die für $\varepsilon=0$ sowie $\alpha_t=\alpha_{t0}$ in die thermisch-elastische Verschiebungsgleichung nach der Theorie unveränderlicher Materialwerte übergeht. Denkt man sich die Lösung von (6) im Sinne der Methode von *Poincare* in Form der Entwicklung

$$\mathfrak{u}=\sum_{k=0}^{n}\mathfrak{u}_k=\mathfrak{u}_0+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k\,\bar{\mathfrak{u}}_k \tag{7}$$

dargestellt, so liefert Einsetzen von (7) in (6) nach Koeffizientenvergleich hinsichtlich ε^k das Gleichungssystem

$$\triangle\mathfrak{u}_0+\frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\mathfrak{u}_0)=\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\nabla\int_0^\vartheta\alpha_t\,dt-\frac{2(1+\nu)}{E}\mathfrak{k}\,, \tag{8a}$$

$$\triangle\mathfrak{u}_1+\frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\bar{\mathfrak{u}}_1)=-\left[(\mathfrak{x}\nabla)\overset{\downarrow}{\mathfrak{u}}_0+(\mathfrak{x}\overset{\downarrow}{\mathfrak{u}}_0)\nabla+\frac{2\nu}{1-2\nu}\mathfrak{x}(\nabla\mathfrak{u}_0)-\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}\mathfrak{x}\int_0^\vartheta\alpha_t\,dt\right], \tag{8b}$$

$$\triangle\bar{\mathfrak{u}}_k+\frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\bar{\mathfrak{u}}_k)=-\left[(\mathfrak{x}\nabla)\overset{\downarrow}{\bar{\mathfrak{u}}}_{k-1}+(\mathfrak{x}\overset{\downarrow}{\bar{\mathfrak{u}}}_{k-1})\nabla+\frac{2\nu}{1-2\nu}\mathfrak{x}(\nabla\bar{\mathfrak{u}}_{k-1})\right]\quad(k=2\ldots n)\,. \tag{8c}$$

Mit (7) nehmen nun nach (2) die Spannungen die Gestalt

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{S}&=\frac{E}{1+\nu}\left[\mathfrak{D}_0+\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\nabla\mathfrak{u}_0-\frac{1+\nu}{1-2\nu}\int_0^\vartheta\alpha_t\,dt\right)\mathfrak{E}\right]+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k\frac{E}{1+\nu}\left[\bar{\mathfrak{D}}_k+\frac{\nu}{1-2\nu}(\nabla\bar{\mathfrak{u}}_k)\mathfrak{E}\right]\\&=\mathfrak{S}_0+\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k\,\bar{\mathfrak{S}}_k=\mathfrak{S}_0+\sum_{k=1}^{n}\bar{\mathfrak{S}}_k\,,\\\mathfrak{S}_0&=\frac{E}{1+\nu}\left[\mathfrak{D}_0+\left(\frac{\nu}{1-2\nu}\nabla\mathfrak{u}_0-\frac{1+\nu}{1-2\nu}\int_0^\vartheta\alpha_t\,dt\right)\mathfrak{E}\right],\quad\bar{\mathfrak{S}}_k=\frac{E}{1+\nu}\left[\bar{\mathfrak{D}}_k+\frac{\nu}{1-2\nu}(\nabla\bar{\mathfrak{u}}_k)\mathfrak{E}\right].\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

[1] Die Pfeile deuten an, daß die Nabla-Operation allein auf den Verschiebungsvektor $\mathfrak{u}$ anzuwenden ist.

an, so daß man hiermit die Gleichungen (8) noch etwas einfacher schreiben kann:

$$\triangle \mathfrak{u}_0 + \frac{1}{1-2\nu} \nabla (\nabla \mathfrak{u}_0) = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \nabla \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \alpha_t \, dt - \frac{2(1+\nu)}{E} \mathfrak{k} \,, \tag{10a}$$

$$\triangle \bar{\mathfrak{u}}_1 + \frac{1}{1-2\nu} \nabla (\nabla \bar{\mathfrak{u}}_1) = -2(1+\nu) \frac{\underline{\mathfrak{x}}\, \mathfrak{S}_0}{E} = -2(1+\nu) \frac{\Phi}{E} (\nabla \vartheta)\, \mathfrak{S}_0 \,. \tag{10b}$$

$$\triangle \bar{\mathfrak{u}}_k + \frac{1}{1-2\nu} \nabla (\nabla \bar{\mathfrak{u}}_k) = -2(1+\nu) \frac{\underline{\mathfrak{x}}\, \bar{\mathfrak{S}}_{k-1}}{E} = -2(1+\nu) \frac{\Phi}{E} (\nabla \vartheta)\, \bar{\mathfrak{S}}_{k-1} \quad (k = 2 \ldots n) \,. \tag{10c}$$

Bei vorgegebenem Temperaturfeld $\vartheta = \vartheta(x, y, z)$ sowie bei vorgegebenen Materialgesetzen $E = E(\vartheta)$ sowie $\alpha_t = \alpha_t(\vartheta)$ ist das Gleichungssystem (8) bzw. (10) rekursiv lösbar. Das Randwertproblem wird einmalig für den Grundzustand $(\mathfrak{u}_0, \mathfrak{S}_0)$ befriedigt. Sämtliche übrigen Randwertprobleme für die Zusatz-Zustände $(\bar{\mathfrak{u}}_k, \bar{\mathfrak{S}}_k)$ bzw. $(\mathfrak{u}_k, \mathfrak{S}_k)$ sind dann homogen.

In hinreichend dünnen scheibenartigen Gebilden kann ein ebener Spannungszustand vorliegen, sofern die Massenkräfte keine Komponente senkrecht zur Scheibenebene besitzen. Sind durch $\mathfrak{e}_\alpha$ und $\mathfrak{e}_\beta$ zwei in die Scheibenebene fallende orthogonale Richtungen charakterisiert, so läßt sich der Spannungstensor mit Hilfe der Normal- und Schubspannungen σ_α, σ_β und $\tau_{\alpha\beta}$ des ebenen Zustandes in der Form

$$\mathfrak{S} = \sum_{i=\alpha,\beta} \sigma_i \, \mathfrak{e}_i \circ \mathfrak{e}_i + \sum_{\substack{i,k=\alpha,\beta \\ i \neq k}} \tau_{ik} \, \mathfrak{e}_i \circ \mathfrak{e}_k = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha & \tau_{\alpha\beta} \\ \tau_{\beta\alpha} & \sigma_\beta \end{pmatrix} \tag{11a}$$

darstellen. Wird als Verzerrungstensor $\mathfrak{D}$ mit $\nabla = \mathfrak{e}_\alpha \frac{\partial}{\partial s_\alpha} + \mathfrak{e}_\beta \frac{\partial}{\partial s_\beta}$ der Ausdruck

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2} (\nabla \circ \mathfrak{u} + \mathfrak{u} \circ \nabla) \tag{11b}$$

definiert, wobei $\mathfrak{u} = u_\alpha \mathfrak{e}_\alpha + u_\beta \mathfrak{e}_\beta$ der in der Scheibenebene liegende Anteil des Verschiebungsvektors ist, so läßt sich das *Hooke*sche Gesetz für den ebenen Fall anstelle von (2) durch

$$\mathfrak{S} = \frac{E}{1+\nu} \left[\mathfrak{D} + \left(\frac{\nu}{1-\nu} \nabla \mathfrak{u} - \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \alpha_t \, dt \right) \mathfrak{E} \right] \tag{12}$$

ausdrücken. Einsetzen von (12) in die Gleichgewichtsbedingung (1) liefert schließlich anstelle von (6) folgende Verschiebungsgleichung für den ebenen Spannungszustand:

$$\triangle \mathfrak{u} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla (\nabla \mathfrak{u}) + \varepsilon \left[(\underline{\mathfrak{x}}\, \nabla) \overset{\downarrow}{\mathfrak{u}} + (\underline{\mathfrak{x}}\, \overset{\downarrow}{\mathfrak{u}}) \nabla + \frac{2\nu}{1-\nu} \underline{\mathfrak{x}}\, (\nabla \mathfrak{u}) - \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \underline{\mathfrak{x}} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \alpha_t \, dt \right]$$
$$- \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \nabla \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \alpha_t \, dt + \frac{2(1+\nu)}{E} \mathfrak{k} = 0 \,, \tag{13}$$

und mit dem Ansatz (7) folgert man schließlich hier nach Koeffizientenvergleich hinsichtlich ε^k anstelle von (8) das Gleichungssystem

$$\triangle \mathfrak{u}_0 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla (\nabla \mathfrak{u}_0) = \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \nabla \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \alpha_t \, dt - \frac{2(1+\nu)}{E} \mathfrak{k} \,, \tag{14a}$$

$$\triangle \bar{\mathfrak{u}}_1 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla (\nabla \bar{\mathfrak{u}}_1) = -\left[(\underline{\mathfrak{x}}\, \nabla) \overset{\downarrow}{\mathfrak{u}}_0 + (\underline{\mathfrak{x}}\, \overset{\downarrow}{\mathfrak{u}}_0) \nabla + \frac{2\nu}{1-\nu} \underline{\mathfrak{x}}\, (\nabla \mathfrak{u}_0) - \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \underline{\mathfrak{x}} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \alpha_t \, dt \right], \tag{14b}$$

$$\triangle \bar{\mathfrak{u}}_k + \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla (\nabla \bar{\mathfrak{u}}_k) = -\left[(\underline{\mathfrak{x}}\, \nabla) \overset{\downarrow}{\bar{\mathfrak{v}}}_{k-1} + (\underline{\mathfrak{x}}\, \overset{\downarrow}{\bar{\mathfrak{u}}}_{k-1}) \nabla + \frac{2\nu}{1-\nu} \underline{\mathfrak{x}}\, (\nabla \bar{\mathfrak{u}}_{k-1}) \right] \quad (k = 2 \ldots n) \,. \tag{14c}$$

Mit dem Grundspannungszustand

$$\mathfrak{S}_0 = \frac{E}{1+\nu} \left[\mathfrak{D}_0 + \left(\frac{\nu}{1-\nu} \nabla \mathfrak{u}_0 - \frac{1+\nu}{1-\nu} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \alpha_t \, dt \right) \mathfrak{E} \right] \tag{15a}$$

sowie den Zusatz-Zuständen

$$\bar{\mathfrak{S}}_k = \frac{E}{1+\nu} \left[\bar{\mathfrak{D}}_k + \frac{\nu}{1-\nu} (\nabla \bar{\mathfrak{u}}_k) \mathfrak{E} \right] \tag{15b}$$

folgt dann für die endgültigen Spannungen

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 + \sum_{k=1}^{n} \varepsilon^k \, \bar{\mathfrak{S}}_k = \mathfrak{S}_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{S}_k \,, \tag{15c}$$

und es lassen sich hiermit analog (10) die Gleichungen (14) noch in folgender Weise vereinfachen:

$$\triangle \mathfrak{u}_0 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla (\nabla \mathfrak{u}_0) = \frac{2(1+\nu)}{1-\nu} \nabla \int_0^{\vartheta} \alpha_t \, dt - \frac{2(1+\nu)}{E} \mathfrak{k} \,, \tag{16a}$$

$$\triangle \bar{\mathfrak{u}}_1 + \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla (\nabla \bar{\mathfrak{u}}_1) = -2(1+\nu) \frac{\chi}{E} \mathfrak{S}_0 = -2(1+\nu) \frac{\Phi}{E} (\nabla \vartheta) \, \mathfrak{S}_0 \,, \tag{16b}$$

$$\triangle \bar{\mathfrak{u}}_k + \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla (\nabla \bar{\mathfrak{u}}_k) = -2(1+\nu) \frac{\chi}{E} \bar{\mathfrak{S}}_{k-1} = -2(1+\nu) \frac{\Phi}{E} (\nabla \vartheta) \, \bar{\mathfrak{S}}_{k-1} \quad (k = 2 \ldots n). \tag{16c}$$

3. Das Temperaturfeld. Mit dem *Fourier*schen Theorem

$$\mathfrak{q} = -\lambda \nabla \vartheta \,, \tag{17}$$

wonach der je Zeit- und Flächeneinheit vorhandene Wärmefluß $\mathfrak{q}$ [calcm^{-2}sec^{-1}] mit der i. allg. temperaturabhängigen Wärmeleitzahl λ [cal cm^{-1} sec^{-1} °C^{-1}] proportional dem Temperaturgradienten gesetzt werden kann, erhält man aus der Wärmemengenbilanz am Körperelement im stationären Falle, wenn außerdem der Volumeneinheit je Zeiteinheit eine Wärmemenge Q [cal cm^{-3} sec^{-1}] zugeführt wird, die Relation

$$\nabla \mathfrak{q} - Q = 0 \,, \qquad \text{d. h.} \qquad \nabla (\lambda \nabla \vartheta) = -Q \,. \tag{18}$$

Führt man hierin anstelle der Temperatur ϑ die Funktion

$$\Theta = \frac{1}{\lambda_0} \int_{t=0}^{\vartheta} \lambda(t) \, dt \qquad \text{mit} \qquad \lambda_0 = \lambda \qquad \text{z. B. für} \qquad t = 0^\circ \text{ C} \tag{19a}$$

ein, so daß

$$\nabla \Theta = \frac{1}{\lambda_0} \lambda(\vartheta) \nabla \vartheta \tag{19b}$$

ist, so folgt aus (18) eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung für Θ:

$$\nabla (\nabla \Theta) = \triangle \Theta = -\frac{Q}{\lambda_0} \,. \tag{20}$$

Nach Lösung von (20) ist nunmehr bei vorgegebenem Materialgesetz $\lambda = \lambda(\vartheta)$ das Temperaturfeld ϑ sofort bestimmbar. Setzt man z. B. ein lineares Gesetz in der Form

$$\lambda(\vartheta) = \lambda_0 - \lambda_1 \vartheta \tag{21a}$$

voraus, so hat man nach (19a)

$$\Theta = \frac{1}{\lambda_0} \int_{t=0}^{\vartheta} (\lambda_0 - \lambda_1 t) \, dt = \vartheta - \frac{\lambda_1}{2\lambda_0} \vartheta^2 \,,$$

also eine quadratische Gleichung für ϑ, aus der man

$$\vartheta = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \sqrt{\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^2 - 2\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\Theta} = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left(1 - \sqrt{1 - 2\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\Theta}\right) \tag{21b}$$

findet. Für $\lambda = \lambda_0 =$ konst. ist nach (19a) $\Theta = \vartheta$, so daß dann (20) die gewöhnliche Wärmeleitungsgleichung für konstante Wärmeleitzahl darstellt[1].

4. Beispiele. a) Erstes Beispiel. Wir betrachten den mittleren Bereich eines sehr langen Stahlrohres mit freien Enden, dessen Mantelflächen $r = r_i = 12$ cm bzw. $r = r_a = 18$ cm die Temperaturen $\vartheta_i = 350^\circ$ C bzw. $\vartheta_a = 280^\circ$ C gegenüber der Temperatur $\vartheta = 0^\circ$ C des spannungs-

[1] Auch aus (21b) läßt sich für $\lambda(\vartheta) = \lambda_0$, d. h. $\lambda_1 \to 0$ die Beziehung $\Theta = \vartheta$ folgern. Für $\lambda_1/\lambda_0 \ll 1$ ist

$$\sqrt{1 - 2\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\Theta} \approx 1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\Theta \,, \qquad \text{also} \qquad \vartheta \approx \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left[1 - 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\Theta\right] = \Theta \,.$$

losen Ausgangszustandes besitzen sollen. Die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte kann im Bereich bis etwa 400° C nach Hütte Bd. I, mit genügender Genauigkeit durch

$$\left.\begin{aligned} \lambda(\vartheta) &= \lambda_0 - \lambda_1 \vartheta\,, \\ \alpha_t(\vartheta) &= \alpha_{t0} + \alpha_{t1}\vartheta\,, \\ E(\vartheta) &= E_0 - E_1\vartheta - E_2\vartheta^2 \end{aligned}\right\} \vartheta \geqq 0\,, \qquad \begin{aligned} &(22\,a)\\ &(22\,b)\\ &(22\,c) \end{aligned}$$

approximiert werden, wobei für Flußstahl

$$\lambda_0 = \lambda\,(\vartheta = 0^\circ\,\mathrm{C}) = 0{,}12\ [\mathrm{cal\,cm^{-1}\,sec^{-1}\,{}^\circ C^{-1}}]\,, \qquad \lambda_1 = 0{,}7\cdot 10^{-4}\ [\mathrm{cal\,cm^{-1}\,sec^{-1}\,{}^\circ C^{-2}}]\,,$$
$$\alpha_{t0} = \alpha_t\,(\vartheta = 0^\circ\,\mathrm{C}) = 1{,}2\cdot 10^{-5}\ [{}^\circ\mathrm{C}^{-1}]\,, \qquad \alpha_{t1} = 1{,}0\cdot 10^{-8}\ [{}^\circ\mathrm{C}^{-2}]\,,$$
$$E_0 = E\,(\vartheta = 0^\circ\,\mathrm{C}) = 2{,}1\cdot 10^{6}\ [\mathrm{kg\,cm^{-2}}]\,, \qquad E_1 = 2{,}75\cdot 10^{2}\ [\mathrm{kg\,cm^{-2}\,{}^\circ C^{-1}}]\,,$$
$$E_2 = 1{,}41\ [\mathrm{kg\,cm^{-2}\,{}^\circ C^{-2}}]$$

ist. Die (mit guter Näherung konstante) Querkontraktion wird zu $\nu = 1/3$ angenommen.

Wir berechnen zunächst das Temperaturfeld: Im mittleren Rohrbereich bildet sich ein ebenes Temperaturfeld aus, so daß (20) mit $Q = 0$ sowie

$$\triangle \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)$$

die Form

$$\triangle\,\Theta \equiv \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\Theta}{dr}\right) = 0$$

annimmt. Durch fortlaufende Integration erhält man

$$\Theta = C_1 \ln r + C_2\,,$$

so daß hiermit aus (21b) endgültig für das Temperaturfeld

$$\vartheta = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left[1 - \sqrt{1 - 2\,\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\,(C_1 \ln r + C_2)}\right]$$

hervorgeht. Die Integrationskonstanten werden aus den Randbedingungen $\vartheta = \vartheta_i$ für $r = r_i$ und $\vartheta = \vartheta_a$ für $r = r_a$ berechnet, und es ergibt sich letztlich

$$\vartheta(r) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1}\left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{\lambda_1\vartheta_i}{\lambda_0}\right)^2 \frac{\ln\frac{r_a}{r}}{\ln\frac{r_a}{r_i}} + \left(1 - \frac{\lambda_1\vartheta_a}{\lambda_0}\right)^2 \frac{\ln\frac{r}{r_i}}{\ln\frac{r_a}{r_i}}}\right]. \qquad (23\,a)$$

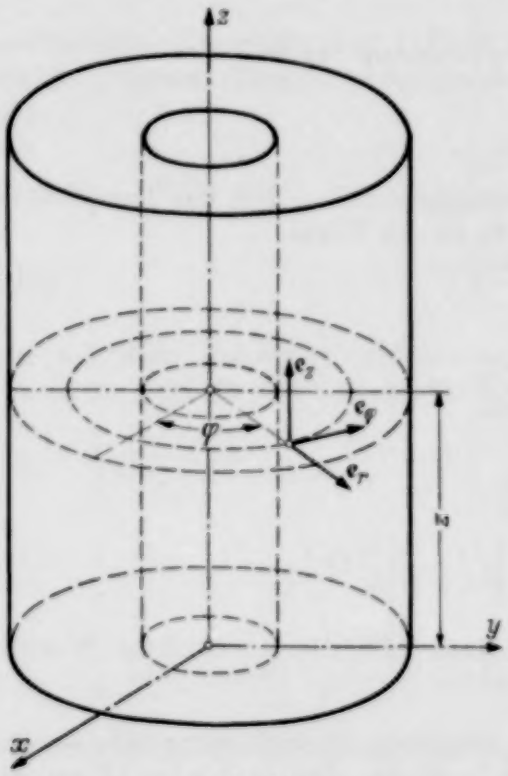


Abb. 1.

Eine zahlenmäßige Berechnung zeigt, daß sich das durch (23a) gegebene Temperaturfeld nahezu überhaupt nicht von dem Feld mit konstanter Wärmeleitzahl

$$\vartheta_0(r) = \frac{\vartheta_i \ln\frac{r_a}{r} + \vartheta_a \ln\frac{r}{r_i}}{\ln\frac{r_a}{r_i}} \qquad (23\,b)$$

unterscheidet[1], so daß für die nachfolgende Spannungsberechnung das Temperaturfeld nach (23b) zugrundegelegt wird.

Da das Temperaturfeld hier allein von r abhängig ist, können wir einen achsensymmetrischen und ebenfalls allein von r abhängigen Spannungs- und Verzerrungszustand erwarten. Darüberhinaus bleiben im mittleren Rohrbereich sämtliche Rohrquerschnitte, $z = \mathrm{konst.}$, während der Verformung eben, so daß man für die Axialverschiebungen w mit den Konstanten A_1 und A_2

$$w = w(z) = A_1 z + A_2\,. \qquad (24\,a)$$

[1] Dies ist i. allg. nur zutreffend, sofern beim Temperaturfeld die Randtemperaturen vorgegeben sind. Es können im Hinblick auf die Wärmespannungen nicht zu vernachlässigende Abweichungen dann entstehen, sofern für das Temperaturfeld eine andere Randwertaufgabe vorliegt, wie dies vom Verfasser bereits in seiner früheren Arbeit gezeigt worden ist.

folgern kann. Der gesamte Verschiebungszustand eines Punktes im mittleren Zylinderbereich ist damit durch den Verschiebungsvektor

$$\mathfrak{u} = v\,\mathfrak{e}_r + w\,\mathfrak{e}_z = v(r)\,\mathfrak{e}_r + (A_1 z + A_2)\,\mathfrak{e}_z \tag{24b}$$

charakterisiert, wenn mit $\mathfrak{e}_r$ bzw. $\mathfrak{e}_z$ die Einheitsvektoren in Radial- bzw. Axialrichtung und mit $v = v(r)$ die Radialverschiebungen bezeichnet werden (Abb. 1). Mit

$$\nabla = \mathfrak{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathfrak{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \mathfrak{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

erhält man dann unter Beachtung von $\frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{e}_r}{\partial \varphi} = \frac{1}{r}\mathfrak{e}_\varphi$

$$\nabla \mathfrak{u} = \frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} + A_1 = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\,v) + A_1\,, \qquad \nabla(\nabla \mathfrak{u}) = \mathfrak{e}_r \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\,v)\right], \qquad \nabla \times \mathfrak{u} = 0\,,$$

$$\triangle \mathfrak{u} = \nabla(\nabla \mathfrak{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathfrak{u}) = \nabla(\nabla \mathfrak{u})\,.$$

Weiterhin ist

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{d\vartheta} = -\frac{E_1 + 2E_2\vartheta}{E_0 - E_1\vartheta - E_2\vartheta^2} = -\frac{2E_2}{E_0}\frac{\vartheta + \frac{E_1}{2E_2}}{1 - \frac{E_1\vartheta}{E_0} - \frac{E_2\vartheta^2}{E_0}}, \qquad \nabla\vartheta = \mathfrak{e}_r\frac{d\vartheta}{dr},$$

und wir setzen demnach

$$\varepsilon = -\frac{2E_2}{E_0}, \qquad \Phi(\vartheta) = \frac{\vartheta + \frac{E_1}{2E_2}}{1 - \frac{E_1\vartheta}{E_0} - \frac{E_2\vartheta^2}{E_0}}, \qquad \mathfrak{x} = \frac{\vartheta + \frac{E_1}{2E_2}}{1 - \frac{E_1\vartheta}{E_0} - \frac{E_2\vartheta^2}{E_0}}\frac{d\vartheta}{dr}\cdot\mathfrak{e}_r = \Psi(r)\,\mathfrak{e}_r\,, \tag{25}$$

so daß schließlich aus (10) mit $\mathfrak{f} = 0$ die Gleichungen

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\,v_0)\right] = \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{d}{dr}\int_0^\vartheta \alpha_t\,dt = \frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha_t(\vartheta)\frac{d\vartheta}{dr}\,, \tag{26a}$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\,\bar v_1)\right] = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu}\frac{\Psi(r)\,\sigma_{r,0}}{E} = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu}f_0(r)\,, \tag{26b}$$

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\,\bar v_k)\right] = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu}\frac{\Psi(r)\,\bar\sigma_{r,k-1}}{E} = -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu}\bar f_{k-1}(r) \quad (k = 2\ldots n) \tag{26c}$$

hervorgehen.

Wir betrachten zunächst die Grundlösung. Aus Gleichung (26a) folgt nach Integration

$$v_0(r) = \frac{1+\nu}{1-\nu}\frac{1}{r}\int r\left(\int_0^\vartheta \alpha_t\,dt\right)dr + C_{1,0}\,r + \frac{C_{2,0}}{r}\,, \qquad \nabla \mathfrak{u}_0 = \frac{1+\nu}{1-\nu}\int_0^\vartheta \alpha_t\,dt + 2\,C_{1,0} + A_{1,0}\,, \tag{27}$$

so daß für die Spannungen des Grundzustandes nach (9)

$$\sigma_{r,0} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{dv_0}{dr} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\nabla \mathfrak{u}_0) - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\int_0^\vartheta \alpha_t\,dt\right]$$

$$= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[C_{1,0} + \nu A_{1,0} - \frac{C_{2,0}(1-2\nu)}{r^2} - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\frac{1}{r^2}\int r\left(\int_0^\vartheta \alpha_t\,dt\right)dr\right], \tag{28a}$$

$$\sigma_{\varphi,0} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{v_0}{r} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\nabla \mathfrak{u}_0) - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\int_0^\vartheta \alpha_t\,dt\right]$$

$$= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left[C_{1,0} + \nu A_{1,0} + \frac{C_{2,0}(1-2\nu)}{r^2} - \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\left(\int_0^\vartheta \alpha_t\,dt - \frac{1}{r^2}\int r\left(\int_0^\vartheta \alpha_t\,dt\right)dr\right)\right], \tag{28b}$$

$$\sigma_{z,0} = \frac{E}{1+\nu}\left[A_{1,0} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\nabla \mathfrak{u}_0) - \frac{1+\nu}{1-2\nu}\int_0^\vartheta \alpha_t\,dt\right] = A_{1,0}\,E - E\int_0^\vartheta \alpha_t\,dt + \nu\,(\sigma_{r,0} + \sigma_{\varphi,0}) \tag{28c}$$

folgt. Aus den Randbedingungen $\sigma_r = -p_i$ für $r = r_i$ und $\sigma_r = -p_a$ für $r = r_a$ (wir wollen hier noch die Wirkung eines Innen- bzw. Außendruckes p_i bzw. p_a berücksichtigen) erhält man

$$C_{1,0} + \nu A_{1,0} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \frac{1}{r_a^2 - r_i^2} \int_{r_i}^{r_a} r \left(\int_0^{\vartheta} \alpha_t \, dt \right) dr + \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{r_a^2 - r_i^2} \left[\frac{p_i \, r_i^2}{E(r_i)} - \frac{p_a \, r_a^2}{E(r_a)} \right], \tag{29a}$$

$$C_{2,0} = \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{r_i^2 \, r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \left[\frac{1}{r^2} \int r \left(\int_0^{\vartheta} \alpha_t \, dt \right) dr \right]_{r=r_i}^{r=r_a} + (1+\nu) \frac{r_i^2 \, r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \left[\frac{p_i}{E(r_i)} - \frac{p_a}{E(r_a)} \right], \tag{29b}$$

und damit ergeben sich schließlich die Radial- und Ringspannungen

$$\sigma_{r,0} = -\frac{E(\vartheta)}{1-\nu} \frac{1}{r_a^2 - r_i^2} \left\{ \left[\left(\frac{r_a}{r} \right)^2 - 1 \right] \int_{r_i}^{r} r \left(\int_0^{\vartheta} \alpha_t \, dt \right) dr - \left[1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right] \int_{r}^{r_a} r \left(\int_0^{\vartheta} \alpha_t \, dt \right) dr \right\}$$
$$- \frac{E(\vartheta)}{E(\vartheta_i)} \frac{p_i \, r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left[\left(\frac{r_a}{r} \right)^2 - 1 \right] - \frac{E(\vartheta)}{E(\vartheta_a)} \frac{p_a \, r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \left[1 - \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right], \tag{30a}$$

$$\sigma_{\varphi,0} = -\frac{E(\vartheta)}{1-\nu} \left[\int_0^{\vartheta} \alpha_t \, dt - \frac{1}{r_a^2 - r_i^2} \left\{ \left[\left(\frac{r_a}{r} \right)^2 + 1 \right] \int_{r_i}^{r} r \left(\int_0^{\vartheta} \alpha_t \, dt \right) dr + \left[1 + \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right] \int_{r}^{r_a} r \left(\int_0^{\vartheta} \alpha_t \, dt \right) dr \right\} \right]$$
$$+ \frac{E(\vartheta)}{E(\vartheta_i)} \frac{p_i \, r_i^2}{r_a^2 - r_i^2} \left[\left(\frac{r_a}{r} \right)^2 + 1 \right] - \frac{E(\vartheta)}{E(\vartheta_a)} \frac{p_a \, r_a^2}{r_a^2 - r_i^2} \left[1 + \left(\frac{r_i}{r} \right)^2 \right]. \tag{30b}$$

Zur Berechnung der Axialspannungen $\sigma_{z,0}$ nach (28c) benötigen wir noch eine Gleichung für die Integrationskonstanten, die wir den Lagerungsbedingungen des Rohres an seinen Enden entnehmen. Während sich im Falle des ebenen Verzerrungszustandes ($\varepsilon_z = 0$)

$$A_{1,0} = 0 \tag{31a}$$

ergibt, hat man für den Fall, daß an den Rohrenden eine gegebene Axialkraft P angreift,

$$\int_{(F)} \sigma_{z,0} \, dF = 2\pi \int_{r_i}^{r_a} r \, \sigma_{z,0} \, dr = P,$$

woraus mit (28c), (30a) und (30b) schließlich

$$A_{1,0} = \frac{\dfrac{P}{2\pi} + \displaystyle\int_{r_i}^{r_a} r \, E \left(\int_0^{\vartheta} \alpha_t \, dt \right) dr - \nu \int_{r_i}^{r_a} (\sigma_{r,0} + \sigma_{\varphi,0}) \, dr}{\displaystyle\int_{r_i}^{r_a} r \, E \, dr}$$

$$= \frac{\dfrac{P}{2\pi} + \dfrac{1}{1-\nu} \displaystyle\int_{r_i}^{r_a} r \, E \left(\int_0^{\vartheta} \alpha_t \, dt \right) dr}{\displaystyle\int_{r_i}^{r_a} r \, E \, dr} - \frac{2\nu}{r_a^2 - r_i^2} \left[\frac{1}{1-\nu} \int_{r_i}^{r_a} r \left(\int_0^{\vartheta} \alpha_t \, dt \right) dr + \frac{p_i \, r_i^2}{E(\vartheta_i)} - \frac{p_a \, r_a^2}{E(\vartheta_a)} \right] \tag{31b}$$

hervorgeht.

Für die Berechnung des ersten Zusatz-Zustandes ($k = 1$) betrachten wir die Differentialgleichung (26b), aus der nach fortlaufender Integration schließlich

$$\left.\begin{aligned} \bar{v}_1 &= -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu} \frac{1}{r} \int r \left(\int f_0 \, dr \right) dr + \bar{C}_{1,1} \, r + \frac{\bar{C}_{2,1}}{r}; \\ \nabla \bar{u}_1 = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \, \bar{v}_1) + \bar{A}_{1,1} &= -\frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{1-\nu} \int f_0 \, dr + 2 \, \bar{C}_{1,1} + \bar{A}_{1,1} \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

folgt. Die zugehörigen Spannungen erhält man hiermit nach (9) zu

$$\bar{\sigma}_{r,1} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{d\bar{v}_1}{dr} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\nabla\,\bar{u}_1)\right]$$

$$= -\frac{E(1-2\nu)}{1-\nu}\left[\frac{1-\nu}{1-2\nu}\int f_0\,dr - \frac{1}{r^2}\int r\,(\int f_0\,dr)\,dr\right] + \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\bar{C}_{1,1}+\nu A_{1,1}}{1-2\nu} - \frac{\bar{C}_{2,1}}{r^2}\right), \quad (33\,a)$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi,1} = \frac{E}{1+\nu}\left[\frac{\bar{v}_1}{r} + \frac{\nu}{1-2\nu}(\nabla\,\bar{u}_1)\right]$$

$$= -\frac{E(1-2\nu)}{1-\nu}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}\int f_0\,dr + \frac{1}{r^2}\int r\,(\int f_0\,dr)\,dr\right] + \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{\bar{C}_{1,1}+\nu A_{1,1}}{1-2\nu} + \frac{\bar{C}_{2,1}}{r^2}\right), \quad (33\,b)$$

$$\bar{\sigma}_{z,1} = \bar{A}_{1,1}\,E + \nu\,(\bar{\sigma}_{r,1} + \bar{\sigma}_{\varphi,1}). \quad (33\,c)$$

Für die Integrationskonstanten gewinnt man aus den (nunmehr homogenen!) Radialspannungs-Randbedingungen $\bar{\sigma}_{r,1} = 0$ für $r = r_i$ und $r = r_a$ zunächst

$$\frac{\bar{C}_{1,1}+\nu\bar{A}_{1,1}}{1-2\nu} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\,\frac{1}{r_a^2-r_i^2}\left\{\frac{1-\nu}{1-2\nu}\left[r^2\int f_0\,dr\right]_{r=r_i}^{r=r_a} - \int_{r_i}^{r_a} r\,(\int f_0\,dr)\,dr\right\}, \quad (34\,a)$$

$$\bar{C}_{2,1} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}\,\frac{r_i^2 r_a^2}{r_a^2-r_i^2}\left\{\frac{1-\nu}{1-2\nu}\int_{r_i}^{r_a} f_0\,dr - \left[\frac{1}{r^2}\int r\,(\int f_0\,dr)\,dr\right]_{r=r_i}^{r=r_a}\right\}, \quad (34\,b)$$

so daß damit für die Radial- und Ringspannungen der ersten Zusatzlösung

$$\bar{\sigma}_{r,1} = \frac{E(\vartheta)}{r_a^2-r_i^2}\left\{r_a^2\left[1-\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]\int_r^{r_a} f_0\,dr - r_i^2\left[\left(\frac{r_a}{r}\right)^2-1\right]\int_{r_i}^{r} f_0\,dr\right.$$

$$\left. + \frac{1-2\nu}{1-\nu}\left(\left[\left(\frac{r_a}{r}\right)^2-1\right]\int_{r_i}^{r} r\left(\int_{r_i}^{r} f_0\,dr\right)dr - \left[1-\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]\int_r^{r_a} r\left(\int_{r_i}^{r} f_0\,dr\right)dr\right)\right\}, \quad (35\,a)$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi,1} = \frac{E(\vartheta)}{r_a^2-r_i^2}\left\{r_a^2\left[1+\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]\int_r^{r_a} f_0\,dr + r_i^2\left[\left(\frac{r_a}{r}\right)^2+1\right]\int_{r_i}^{r} f_0\,dr\right.$$

$$\left. - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\left(\left[\left(\frac{r_a}{r}\right)^2+1\right]\int_{r_i}^{r} r\left(\int_{r_i}^{r} f_0\,dr\right)dr + \left[1+\left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]\int_r^{r_a} r\left(\int_{r_i}^{r} f_0\,dr\right)dr - [r_a^2-r_i^2]\int_{r_i}^{r} f_0\,dr\right)\right\} \quad (35\,b)$$

gefolgert werden kann. Zur Berechnung von $\bar{\sigma}_{z,1}$ ist nunmehr noch $A_{1,1}$ zu berechnen, wofür im Falle des ebenen Verzerrungszustandes

$$\bar{A}_{1,1} = 0 \quad (36\,a)$$

und im Falle einer vorgegebenen Axialbelastung P des Rohres an seinen Enden die (ebenfalls homogene!) Randbedingung

$$\int_{(F)} r\,\bar{\sigma}_{z,1}\,dF = 2\pi\int_{r_i}^{r_a} r\,\bar{\sigma}_{z,1}\,dr = 0$$

gilt, aus der

$$A_{1,1} = -\nu\,\frac{\int_{r_i}^{r_a} r\,(\bar{\sigma}_{r,1}+\bar{\sigma}_{\varphi,1})\,dr}{\int_{r_i}^{r_a} r\,E\,dr} \quad (36\,b)$$

hervorgeht.

In entsprechender Weise werden nun die übrigen Näherungen gebildet, so daß also allgemein für die Spannungen des k-ten Zusatz-Zustandes mit

$$\bar{f}_{k-1} = \frac{\Psi(r)}{E}\,\bar{\sigma}_{r,k-1} \quad (37)$$

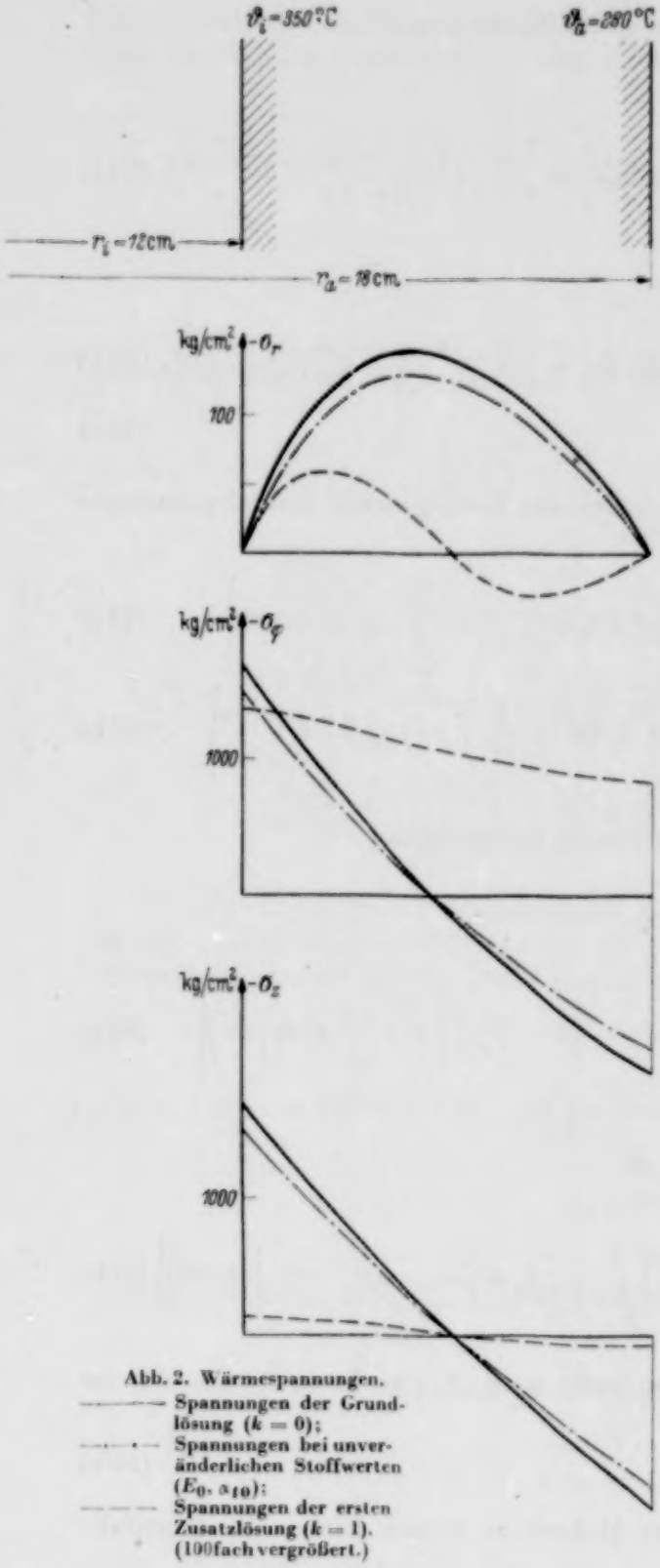


Abb. 2. Wärmespannungen.
——— Spannungen der Grundlösung ($k = 0$);
—·—·— Spannungen bei unveränderlichen Stoffwerten (E_0, α_{10});
– – – Spannungen der ersten Zusatzlösung ($k = 1$).
(100fach vergrößert.)

schließlich

$$\bar{\sigma}_{r,k} = \frac{E(\vartheta)}{r_a^2 - r_i^2}\left\{ r_a^2 \left[1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right] \int_r^{r_a} \bar{f}_{k-1}\, dr - r_i^2 \cdot \left[\left(\frac{r_a}{r}\right)^2 - 1\right] \right.$$
$$\times \int_{r_i}^{r} \bar{f}_{k-1}\, dr + \frac{1-2\nu}{1-\nu}\left(\left[\left(\frac{r_a}{r}\right)^2 - 1\right] \right.$$
$$\times \int_{r_i}^{r} r \left(\int_{r_i}^{r} \bar{f}_{k-1}\, dr \right) dr - \left[1 - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]$$
$$\left. \left. \times \int_{r}^{r_a} r \left(\int_{r_i}^{r} \bar{f}_{k-1}\, dr \right) dr \right) \right\}, \qquad (38a)$$

$$\bar{\sigma}_{\varphi,k} = \frac{E(\vartheta)}{r_a^2 - r_i^2}\left\{ r_a^2 \left[1 + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right] \int_r^{r_a} \bar{f}_{k-1}\, dr + r_i^2 \left[\left(\frac{r_a}{r}\right)^2 + 1\right] \right.$$
$$\times \int_{r_i}^{r} \bar{f}_{k-1}\, dr - \frac{1-2\nu}{1-\nu}\left(\left[\left(\frac{r_a}{r}\right)^2 + 1\right] \right.$$
$$\times \int_{r_i}^{r} r \left(\int_{r_i}^{r} \bar{f}_{k-1}\, dr \right) dr + \left[1 + \left(\frac{r_i}{r}\right)^2\right]$$
$$\left. \left. \times \int_{r}^{r_a} r \left(\int_{r_i}^{r} \bar{f}_{k-1}\, dr \right) dr - (r_a^2 - r_i^2) \int_{r_i}^{r} \bar{f}_{k-1}\, dr \right) \right\}, \qquad (38b)$$

$$\bar{\sigma}_{z,k} = \bar{A}_{1,k}\, E + \nu\, (\bar{\sigma}_{r,k} + \bar{\sigma}_{\varphi,k}) \qquad (38c)$$

und

$$\bar{A}_{1,k} = 0\,, \qquad (39a)$$

bzw.

$$\bar{A}_{1,k} = -\nu \frac{\int_r^{r_a} r\, (\bar{\sigma}_{r,k} + \bar{\sigma}_{\varphi,k})\, dr}{\int_{r_i}^{r_a} r\, E\, dr} \qquad (39b)$$

folgt. Der endgültige Spannungszustand wird damit im Sinne von (9)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{r,0} + \sum_1^n \varepsilon^k\, \bar{\sigma}_{r,k} = \sigma_{r,0} + \sum_1^n \sigma_{r,k}\,, \\ \sigma_\varphi &= \sigma_{\varphi,0} + \sum_1^n \varepsilon^k\, \bar{\sigma}_{\varphi,k} = \sigma_{\varphi,0} + \sum_1^n \sigma_{\varphi,k}\,, \\ \sigma_z &= \sigma_{z,0} + \sum_1^n \varepsilon^k\, \bar{\sigma}_{z,k} = \sigma_{z,0} + \sum_1^n \sigma_{z,k}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (40)$$

In Tabelle 1 sind einige Zahlenwerte für die Spannungen der Grundlösung $k = 0$ und der ersten Zusatzlösung eingetragen[1]. Man erkennt, daß die Funktionenreihen (40) so stark konvergieren, daß

r [cm]	$\sigma_{r,0}$ [kg/cm²]	$\sigma_{r,1}$ [kg/cm²]	$\hat{\sigma}_r$ [kg/cm²]	$\sigma_{\varphi,0}$ [kg/cm²]	$\sigma_{\varphi,1}$ [kg/cm²]	$\hat{\sigma}_\varphi$ [kg/cm²]	$\sigma_{z,0}$ [kg/cm²]	$\sigma_{z,1}$ [kg/cm²]	$\hat{\sigma}_z$ [kg/cm²]
12	0	0	0	—1662,5	14,0	—1499,9	—1672,6	—1,3	—1499,9
13	—101,6	—0,6	— 91,12	— 985,1	—12,8	— 886,4	—1096,9	—1,1	— 976,5
14	—144,6	—0,4	—128,77	— 404,1	—11,5	— 365,0	— 558,9	—0,5	— 493,8
15	—145,6	—0,07	—129,20	+ 102,0	—10,4	+ 85,8	— 54,0	+0,01	— 43,4
16	—116,7	+0,3	—103,18	+ 548,7	— 9,5	+ 480,7	+ 421,4	+0,5	+ 377,2
17	66,3	+0,2	— 58,32	+ 947,2	— 8,6	+ 831,4	+ 870,5	+0,7	+ 772,6
18	0	0	0	+1300,3	— 8,1	+1146,1	+1295,8	+0,9	+1146,3

[1] Der Zusatz-Zustand $k = 1$ wurde hierbei durch numerische Integration der Gln. (35a, b) und (36b) bestimmt.

man bereits die Grundlösung $k = 0$ als hinreichend genaue Näherungslösung ansehen kann. Die jeweils dritte Spalte in der Spannungstabelle gibt die entsprechenden Wärmespannungen $\hat{\sigma}$ nach der Theorie unveränderlicher Materialwerte an, die durchweg etwas kleiner als die genaueren Spannungen sind (Abb. 2). Die wirklichen Wärmespannungen in einem Stahlrohr sind also größer als die nach der Theorie unveränderlicher Stoffwerte E_0 und α_{t0} berechneten. Die Unterschiede

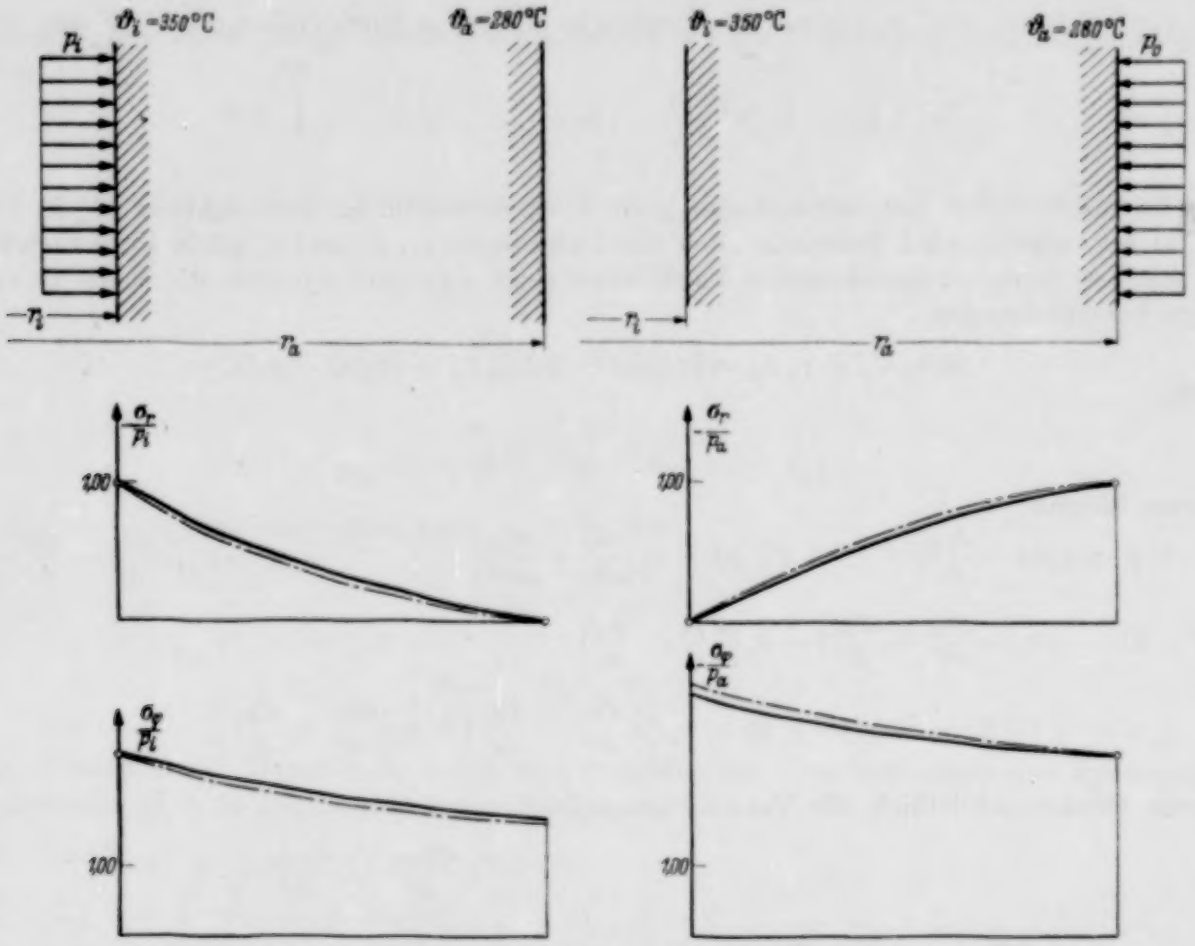


Abb. 3. Spannungen infolge rein mechanischer Einwirkungen. a) Belastung durch Innendruck p_i; b) Belastung durch Außendruck p_a: ——— Spannungen der Grundlösung ($k = 0$); —·—·— Spannungen bei unveränderlichen Stoffwerten.

sind im vorliegenden Falle noch nicht allzu groß[1] (rund 10 bis 15%); doch können sie erheblich sein, wenn für das Temperaturfeld eine andere Randwertaufgabe vorliegt, wie vom Verfasser früher gezeigt wurde. Die aus rein mechanischen Einwirkungen herrührenden Spannungen ändern sich demgegenüber nicht in demselben Maße (Abb. 3).

b) Zweites Beispiel. Als weiteres Beispiel untersuchen wir einen Stab konstanten Querschnittes (Abb. 4), an dessen Enden ein in der Symmetrieebene (x, z) des Stabes wirkendes Moment M_y und

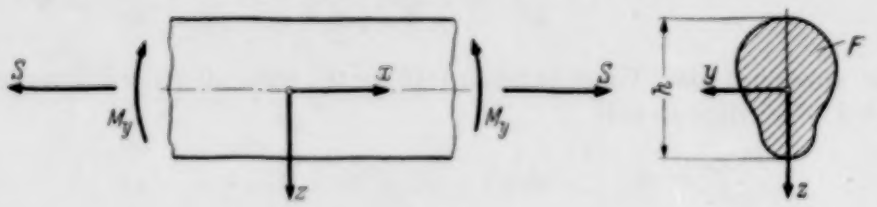


Abb. 4.

eine in derselben Ebene wirkende Längskraft S angreifen sollen. Der Stab stehe außerdem unter dem Einfluß eines allein mit z veränderlichen Temperaturfeldes $\vartheta = \vartheta(z)$.

[1] Ermittelt man mit Hilfe der Theorie unveränderlicher, für die mittlere Rohrtemperatur $\vartheta_m = 315°$ C gültiger Stoffwerte die Wärmespannungen, so ergeben sich hierfür wegen $E_m = E(315°\,\mathrm{C}) = 0{,}891\,651\,E_0$ und $\alpha_{tm} = \alpha_t(315°\,\mathrm{C}) = 1{,}2625\,\alpha_{t0}$ [nach (22)] die Spannungen $\sigma' = (E_m \alpha_{tm}/E_0 \alpha_{t0})\,\hat{\sigma} = 1{,}125\,709\,\hat{\sigma}$, und diese stimmen mit den Spannungen der Grundlösung sehr gut überein. Dies liegt daran, daß die Temperaturunterschiede innerhalb des Systems nicht sehr groß sind ($\max \Delta\vartheta = \vartheta_i - \vartheta_a = 70°$), so daß sich die tatsächlichen Stoffwerte nicht sehr von den mittleren Werten E_m und α_{tm} unterscheiden.

Ebenso wie in der gewöhnlichen Balkentheorie kommen wir auch hier zu einer Lösung der Verschiebungsgleichungen, wenn wir voraussetzen, daß die Spannungen σ_y bzw. σ_z gegenüber den (von y unabhängig angenommenen) Spannungen σ_x vernachlässigt werden können. Sehen wir außerdem auch noch sämtliche Schubspannungen als vernachlässigbar klein an, so entsprechen diese hinsichtlich der Spannungen getroffenen Annahmen auch im vorliegenden Falle, wie in der gewöhnlichen Balkentheorie der *Bernoulli*schen Hypothese[1].

Mit $\sigma_z \ll \sigma_x$ sowie $\sigma_y \ll \sigma_x$ nimmt das *Hooke*sche Gesetz in guter Näherung die Form

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \int_{\vartheta}^{\vartheta(z)} \alpha_t \, dt \,, \qquad \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu \sigma_x}{E} + \int_{\vartheta}^{\vartheta(z)} \alpha_t \, dt \tag{41}$$

an, und da aus der Gleichgewichtsbedingung am Körperelement in Axialrichtung $\partial\sigma_x/\partial x = 0$, also $\sigma_x = \sigma_x(z)$ hervorgeht, sind demnach auch die Dehnungen ε_x, ε_y und ε_z allein Funktionen von z, so daß mit den zunächst unbekannten Funktionen $g_1(z)$, $g_2(z)$ und $g_3(x)$ für die in die (x, z)-Ebene fallenden Verschiebungen

$$\mathfrak{u} = u_x \mathfrak{e}_x + u_z \mathfrak{e}_z = [x \varepsilon_x(z) + g_1(z)] \mathfrak{e}_x + [g_2(z) + g_3(x)] \mathfrak{e}_z \tag{42}$$

folgt. Mit

$$\nabla = \mathfrak{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

erhält man hieraus

$$\nabla \mathfrak{u} = \varepsilon_x(z) + \frac{dg_2}{dz}; \qquad \nabla (\nabla \mathfrak{u}) = \mathfrak{e}_z \left(\frac{d\varepsilon_x}{dz} + \frac{d^2 g_2}{dz^2} \right); \qquad \nabla \times \mathfrak{u} = \mathfrak{e}_y \left(x \frac{d\varepsilon_x}{dz} - \frac{dg_1}{dz} - \frac{dg_3}{dx} \right),$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathfrak{u}) = -\mathfrak{e}_x \left(x \frac{d^2 \varepsilon_x}{dz^2} + \frac{d^2 g_1}{dz^2} \right) - \mathfrak{e}_z \left(\frac{d^2 g_3}{dx^2} - \frac{d\varepsilon_x}{dz} \right),$$

$$\Delta \mathfrak{u} = \nabla (\nabla \mathfrak{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathfrak{u}) = \mathfrak{e}_x \left(x \frac{d^2 \varepsilon_x}{dz^2} + \frac{d^2 g_1}{dz^2} \right) + \mathfrak{e}_z \left(\frac{d^2 g_3}{dx^2} + \frac{d^2 g_2}{dz^2} \right)$$

und damit werden schließlich die Verschiebungsgleichungen (16)

$$x \frac{d^2 \varepsilon_{x,0}}{dz^2} + \frac{d^2 g_{1,0}}{dz^2} = 0 \,, \tag{43a}$$

$$\frac{d^2 g_{2,0}}{dz^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{d^2 g_{3,0}}{dx^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{d\varepsilon_{x,0}}{dz} - (1+\nu) \frac{d}{dz} \int_{\vartheta}^{\vartheta} \alpha_t \, dt = 0 \,, \tag{43b}$$

$$x \frac{d^2 \bar{\varepsilon}_{x,1}}{dz^2} + \frac{d^2 \bar{g}_{1,1}}{dz^2} = 0 \,, \tag{44a}$$

$$\frac{d^2 \bar{g}_{2,1}}{dz^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{d^2 \bar{g}_{3,1}}{dx^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}_{x,1}}{dz} = 0 \,, \tag{44b}$$

$$x \frac{d^2 \bar{\varepsilon}_{x,k}}{dz^2} + \frac{d^2 \bar{g}_{1,k}}{dz^2} = 0 \,, \tag{45a}$$

$$\frac{d^2 \bar{g}_{2,k}}{dz^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{d^2 \bar{g}_{3,k}}{dx^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{d\bar{\varepsilon}_{x,k}}{dz} = 0 \,. \tag{45b}$$

Wir betrachten zunächst den Grundzustand ($k = 0$), also die Gleichungen (43a) und (43b). Gleichung (43a) wird befriedigt durch

$$\frac{d^2 g_{1,0}}{dz^2} = 0 \,, \qquad \text{also} \qquad g_{1,0}(z) = A_{1,0} z + A_{2,0} \tag{46a}$$

sowie

$$\frac{d^2 \varepsilon_{x,0}}{dz^2} = 0 \,, \qquad \text{also} \qquad \varepsilon_{x,0}(z) = C_{1,0} z + C_{2,0} \,, \tag{46b}$$

so daß damit Gleichung (43b) die Form

$$\frac{d^2 g_{2,0}}{dz^2} = -\frac{1-\nu}{2} \frac{d^2 g_{3,0}}{dx^2} - \frac{1+\nu}{2} C_{1,0} + (1+\nu) \frac{d}{dz} \int_{\vartheta}^{\vartheta} \alpha_t \, dt$$

[1] Wir haben es hier also mit einem speziellen [in der (x, z)-Ebene wirkenden] ebenen Spannungszustande zu tun, so daß wir nachfolgend die Verschiebungsgleichungen (14) bzw. (16) heranziehen werden.

annimmt. Fortlaufende Integration liefert

$$\varepsilon_{x,0} = \frac{dg_{2,0}}{dz} = -\left(\frac{1-\nu}{2}\frac{d^2g_{3,0}}{dx^2} + \frac{1+\nu}{2}C_{1,0}\right)z + (1+\nu)\int_0^\vartheta \alpha_t\,dt + C_{3,0}\,, \tag{47a}$$

$$g_{2,0}(z) = -\left(\frac{1-\nu}{2}\frac{d^2g_{3,0}}{dx^2} + \frac{1+\nu}{2}C_{1,0}\right)\frac{z^2}{2} + (1+\nu)\int\left(\int_0^\vartheta \alpha_t\,dt\right)dz + C_{3,0}\,z + C_{4,0}\,. \tag{47b}$$

Zur Reduktion der Integrationskonstanten betrachten wir die *Hooke*schen Gleichungen (41). Hiernach muß

$$\sigma_{x,0} = E\left(\varepsilon_{x,0} - \int_0^\vartheta \alpha_t\,dt\right) = \frac{E}{\nu}\left(\int_0^\vartheta \alpha_t\,dt - \varepsilon_{z,0}\right)$$

sein, und hieraus folgt nach Einsetzen von (46b) und (47a) mit einem Koeffizientenvergleich hinsichtlich $z^k\,(k=0,1)$

$$C_{3,0} = -\nu\,C_{2,0}$$

sowie

$$\frac{d^2g_{3,0}}{dx^2} + C_{1,0} = 0\,,$$

also

$$g_{3,0}(x) = -C_{1,0}\frac{x^2}{2} + A_{3,0}\,x + A_{4,0}\,,$$

wobei $A_{2,0} = -A_{1,0}$ ist, was sofort aus $\tau_{xz,0} = 0$, also

$$\frac{\partial u_{x,0}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z,0}}{\partial x} = 0$$

bzw.

$$x\frac{d\varepsilon_{x,0}}{dz} + \frac{dg_1}{dz} + \frac{dg_3}{dx} = 0$$

gefolgert werden kann. Damit lassen sich nun endgültig die Verschiebungen und Spannungen des Grundzustandes $(k=0)$ angeben:

$$u_{x,0}(x,z) = x\,(C_{1,0}\,z + C_{2,0}) + A_{1,0}\,z + A_{2,0}\,, \tag{48a}$$

$$u_{z,0}(x,z) = (1+\nu)\int\left(\int_0^\vartheta \alpha_t\,dt\right)dz - \nu\left(C_{1,0}\frac{z^2}{2} + C_{2,0}\,z\right) - C_{1,0}\frac{x^2}{2} - A_{1,0}\,x + B_0\,,\quad (B_0 = A_{4,0} + C_{4,0})\,, \tag{48b}$$

$$\sigma_{x,0}(z) = E\left(\varepsilon_{x,0} - \int_0^\vartheta \alpha_t\,dt\right) = E\left(C_{1,0}\,z + C_{2,0} - \int_0^\vartheta \alpha_t\,dt\right). \tag{48c}$$

Die verbliebenen Integrationskonstanten können nunmehr mit Hilfe der Randbedingungen ermittelt werden. Zunächst einmal folgt aus den Gleichgewichtsbedingungen

$$\int_{(F)} \sigma_x\,dF = S\,, \qquad \int_{(F)} \sigma_x\,z\,dF = M_y$$

mit den Abkürzungen

$$\varkappa_{MS} = \varkappa_{SM} = F\,h\,\frac{\int_{(F)} \frac{E}{E_0}\,z\,dF}{\int_{(F)} \frac{E}{E_0}\,dF \int_{(F)} \frac{E}{E_0}\,z^2\,dF - \left(\int_{(F)} \frac{E}{E_0}\,z\,dF\right)^2}\,, \tag{49a}$$

$$\varkappa_{MM} = J_y\,\frac{\int_{(F)} \frac{E}{E_0}\,dF}{\int_{(F)} \frac{E}{E_0}\,dF \int_{(F)} \frac{E}{E_0}\,z^2\,dF - \left(\int_{(F)} \frac{E}{E_0}\,z\,dF\right)^2}\,, \qquad J_y = \int_{(F)} z^2\,dF\,, \tag{49b}$$

$$\varkappa_{SS} = F\,\frac{\int_{(F)} \frac{E}{E_0}\,z^2\,dF}{\int_{(F)} \frac{E}{E_0}\,dF \int_{(F)} \frac{E}{E_0}\,z^2\,dF - \left(\int_{(F)} \frac{E}{E_0}\,z\,dF\right)^2}\,, \tag{49c}$$

$$\varkappa_{ST} = \frac{1}{T_0} \frac{\int\limits_{(F)} \frac{E}{E_0} z^2\, dF \int\limits_{(F)} \frac{E}{E_0} \left(\int\limits_0^\vartheta \frac{\alpha_t}{\alpha_{t0}}\, dt \right) dF - \int\limits_{(F)} \frac{E}{E_0} z\, dF \int\limits_{(F)} \frac{E}{E_0} z \left(\int\limits_0^\vartheta \frac{\alpha_t}{\alpha_{t0}}\, dt \right) dF}{\int\limits_{(F)} \frac{E}{E_0} dF \int\limits_{(F)} \frac{E}{E_0} z^2\, dF - \left(\int\limits_{(F)} \frac{E}{E_0} z\, dF \right)^2}, \tag{49d}$$

$$\varkappa_{MT} = \frac{h}{T_1} \frac{\int\limits_{(F)} \frac{E}{E_0} dF \int\limits_{(F)} \frac{E}{E_0} z \left(\int\limits_0^\vartheta \frac{\alpha_t}{\alpha_{t0}}\, dt \right) dF - \int\limits_{(F)} \frac{E}{E_0} z\, dF \int\limits_{(F)} \frac{E}{E_0} \left(\int\limits_0^\vartheta \frac{\alpha_t}{\alpha_{t0}}\, dt \right) dF}{\int\limits_{(F)} \frac{E}{E_0} dF \int\limits_{(F)} \frac{E}{E_0} z^2\, dF - \left(\int\limits_{(F)} \frac{E}{E_0} z\, dF \right)^2} \tag{49e}$$

für die Konstanten $C_{1,0}$ und $C_{2,0}$

$$C_{1,0} = -\frac{S}{E_0 F h} \varkappa_{MS} + \frac{M_y}{E_0 J_y} \varkappa_{MM} + \frac{\alpha_{t0} T_1}{h} \varkappa_{MT}, \tag{50a}$$

$$C_{2,0} = \frac{S}{E_0 F} \varkappa_{SS} - \frac{M_y}{E_0 F h} \varkappa_{SM} + \alpha_{t0} T_0 \varkappa_{ST}, \tag{50b}$$

so daß für die Spannungen der Grundlösung endgültig

$$\sigma_{x,0} = \frac{E(z)}{E_0} \left\{ \frac{S}{F} \left(\varkappa_{SS} - \varkappa_{MS} \frac{z}{h} \right) + \frac{M_y h}{J_y} \left(-\varkappa_{SM} \frac{J_y}{F h^2} + \varkappa_{MM} \frac{z}{h} \right) + E_0 \alpha_{t0} T_0 \left(\varkappa_{ST} + \frac{T_1}{T_0} \varkappa_{MT} \frac{z}{h} \right) - E_0 \int_0^\vartheta \alpha_t\, dt \right\} \tag{51}$$

gefunden wird. Die übrigen Konstanten folgen aus den Lagerungsbedingungen des Stabes. Setzen wir z. B. willkürlich $u_0 = 0$ für $x = 0$ und $z = 0$ sowie

$$\frac{d}{dx} [u_{z,0}(x, z = 0)] = 0 \qquad \text{für} \qquad x = 0,$$

d. h. an der Stelle $x = 0$ die Verschiebung und die Tangentenneigung der Achse $z = 0$ des Stabes gleich Null, was einer Einspannung des Stabes entspricht, so ergeben sich

$$A_{1,0} = 0, \qquad A_{2,0} = 0, \qquad B_0 = -(1 + \nu) \left[\int \left(\int_0^\vartheta \alpha_t\, dt \right) dz \right]_{z=0},$$

so daß der Verschiebungszustand der Grundlösung letztlich

$$u_{x,0} = x (C_{1,0} z + C_{2,0}), \tag{52a}$$

$$u_{z,0} = (1 + \nu) \int_{z=0}^{z} \left(\int_0^\vartheta \alpha_t\, dt \right) dz - \nu \left(C_{1,0} \frac{z^2}{2} + C_{2,0} z \right) - C_{1,0} \frac{x^2}{2} \tag{52b}$$

wird. Insbesondere folgt für die Verschiebungen der Stabachse $z = 0$

$$u_{x0}(x, z = 0) = u(x) = C_{2,0} x, \tag{53a}$$

$$u_{z,0}(x, z = 0) = w(x) = -C_{1,0} \frac{x^2}{2}. \tag{53b}$$

Wir betrachten nun die Zusatzzustände $k = 1, 2, \ldots n$, deren Differentialgleichungen (44) und (45) homogen sind, also keine Störfunktion enthalten [wie z. B. (43b), wo der Ausdruck $(1 + \nu)\ d \left(\int_0^\vartheta \alpha_t dt \right) dz$ auftritt]. Hier werden also die Lösungen allein von den homogenen Lösungen der Differentialgleichungen gebildet, und da die zugehörigen Randwertprobleme sämtlich homogen sein sollen, so sind also sämtliche Zusatz-Zustände Null! Der Grundzustand stellt in diesem Falle die exakte Lösung des Problems unter den getroffenen Näherungsannahmen dar. Man erkennt nun aus (52a) und (52b), daß auch im vorliegenden Falle des temperaturabhängigen, also mit der Höhe z veränderlichen Elastizitätsmoduls die *Bernoulli*sche Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte Gültigkeit hat. Die Neigung $\partial u_{x,0}/\partial z$ eines Stabquerschnittes $x =$ konst. ist ebenso groß wie die Tangentenneigung dw/dx der verformten Stabachse $z = 0$, d. h. die Querschnitte stehen nach der Verformung weiterhin senkrecht auf der verformten Stabachse, und nach zweimaliger Differentiation von (53b) erhält man mit (50a)

$$\frac{d^2 w}{dx^2} = w'' = -C_{1,0} = \frac{S}{E_0 F h} \varkappa_{MS} - \frac{M_y}{E_0 J_y} \varkappa_{MM} - \frac{\alpha_{t0} T_1}{h} \varkappa_{MT}. \tag{54}$$

d. h. eine Beziehung, die für konstanten Elastizitätsmodul, konstante Wärmeausdehnungszahl und eine in der Balkentheorie üblicherweise linear mit z veränderlich vorausgesetzte Temperaturverteilung

$$\vartheta(z) = T_0 + T_1 \frac{z}{h}$$

wegen der in diesem Falle sich ergebenden Werte

$$\varkappa_{MS} = \varkappa_{SM} = \frac{F h z_S}{J_{S_y}}, \qquad \varkappa_{SS} = \varkappa_{MM} = 1 + \frac{z_S^2 F}{J_{S_y}} = \frac{J_y}{J_{S_y}}, \qquad \varkappa_{ST} = \varkappa_{MT} = 1,$$

$$J_{S_y} = J_y - z_S^2 F, \qquad z_S = \frac{1}{F} \int_{(F)} z \, dF$$

in die Differentialgleichung der elastischen Linie des Stabes

$$w'' = -\frac{M_y - S z_S}{E_0 J_{S_y}} - \frac{\alpha_{t0} T_1}{h} = -\frac{M_{S_y}}{E_0 J_{S_y}} - \frac{\alpha_{t0} T_1}{h}$$

bzw. wenn die Stabachse $z = 0$ die Schwerachse ist, in

$$w'' = -\frac{M_y}{E J} - \frac{\alpha_{t0} T_1}{h}$$

übergeht. Die Differentialgleichung der Axialverschiebungen erhält man nach einmaliger Differentiation von (53a). Es folgt mit (50b)

$$\frac{du}{dx} = u' = C_{2,0} = \frac{S}{E_0 F} \varkappa_{SS} - \frac{M_y}{E_0 F h} \varkappa_{SM} + \alpha_{t0} T_0 \varkappa_{ST}, \tag{55}$$

und hieraus geht für $E = \text{konst.}$, $\alpha_t = \text{konst.}$ sowie $\vartheta(z) = T_0 + T_1 \frac{z}{h}$ die Relation

$$u' = \frac{S}{E_0 F} - z_S \frac{M_y - S z_S}{E_0 J_{S_y}} + \alpha_{t0} T_0 = \frac{S}{E_0 F} - \frac{M_{S_y}}{E_0 J_{S_y}} z_S + \alpha_{t0} T_0 = \frac{S}{E_0 F} + \left(w'' + \frac{\alpha_{t0} T_1}{h} \right) z_S + \alpha_{t0} T_0$$

$$= \frac{S}{E_0 F} + z_S w'' + \alpha_{t0} \vartheta_S, \qquad \left(\vartheta_S = T_0 + T_1 \frac{z_S}{h} \right)$$

und, sofern die Stabachse $z = 0$ die Schwerachse ist,

$$u' = \frac{S}{E_0 F} + \alpha_{t0} T_0$$

hervor. Es erscheint daher gerechtfertigt, die Gleichungen (54) und (55) auch für veränderliche Schnittlasten $M_y = M_y(x)$ sowie $S = S(x)$ als gültig anzusehen, womit man nunmehr das Problem der Stabbiegung auch im Bereich höherer Temperaturen allgemein erfaßt haben dürfte.

Eine gewisse Vereinfachung ergibt sich in den Gleichungen (54) und (55) noch dann, wenn, ebenso wie bei den Verbundquerschnitten im Stahlbau und Stahlbetonbau, die Stabachse $z = 0$ durch

$$\int_{(F)} \frac{E}{E_0} z \, dF = 0 \tag{56a}$$

definiert wird, womit $\varkappa_{MS} = \varkappa_{SM} = 0$ verbunden ist, so daß die für diese Stabachse gültigen Gleichungen die Form

$$w'' = -\frac{M_y}{E_0 J_y} \varkappa_{MM} - \frac{\alpha_{t0} T_1}{h} \varkappa_{MT}, \tag{56b}$$

$$u' = \frac{S}{E_0 F} \varkappa_{SS} + \alpha_{t0} T_0 \varkappa_{ST} \tag{56c}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} \varkappa_{MM} &= \frac{J_y}{\int_{(F)} \frac{E}{E_0} z^2 \, dF}, & \varkappa_{SS} &= \frac{F}{\int_{(F)} \frac{E}{E_0} \, dF}, \\ \varkappa_{MT} &= \frac{h}{T_1} \frac{\int_{(F)} \frac{E}{E_0} z \left(\int_0^\vartheta \frac{\alpha_t}{\alpha_{t0}} dt \right) dF}{\int_{(F)} \frac{E}{E_0} z^2 \, dF}, & \varkappa_{ST} &= \frac{1}{T_0} \frac{\int_{(F)} \frac{E}{E_0} \left(\int_0^\vartheta \frac{\alpha_t}{\alpha_{t0}} dt \right) dF}{\int_{(F)} \frac{E}{E_0} \, dF} \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

annehmen.

Bevor wir auf die Berechnung der $\varkappa$-Werte für ein konkretes Beispiel eingehen, sei noch angemerkt, daß sich die durchgeführten Überlegungen leicht auch auf den Fall der Doppelbiegung erweitern lassen, sofern man für die Spannungen an Stelle von (48c)

$$\sigma_x = E\left(C_{1,0}\, z + C_{2,0} + C_{3,0}\, y - \int_0^{\vartheta} \alpha_t \, dt\right)$$

einführt. Die Ausdrücke werden entsprechend verwickelter, und man erkennt, daß auch die Hauptträgheitsrichtungen von der Verteilung eines gleichzeitig vorhandenen ungleichmäßigen Temperaturfeldes abhängig werden. Auf eine nähere Untersuchung dieser Erscheinungen wird jedoch hier nicht eingegangen.

Eine weitere Bemerkung ist im Hinblick auf (51) erforderlich: Betrachten wir speziell den Fall eines statisch bestimmt gelagerten Trägers unter alleiniger Temperatureinwirkung, wo bekanntlich keine Schnittlasten $M_y(x)$ bzw. $S(x)$ entstehen können, so erhalten wir aus (51)

$$\sigma_{xT}(z) = E(z)\,\alpha_{t0}\, T_0\left(\varkappa_{ST} + \frac{T_1}{T_0}\,\varkappa_{MT}\,\frac{z}{h} - \frac{1}{T_0}\int_0^{\vartheta} \frac{\alpha_t}{\alpha_{t0}}\, dt\right). \tag{58}$$

also trotz des Fehlens jeglicher Schnittlasten Spannungen, die nur für $\alpha_t = \alpha_{t0}$ und einen linearen Temperaturverlauf

$$\vartheta = T_0 + T_1 \frac{z}{h}$$

verschwinden. In diesem Falle werden $\varkappa_{ST} = \varkappa_{MT} = 1$ sowie

$$\int_0^{\vartheta} \frac{\alpha_t}{\alpha_{t0}}\, dt = T_0 + T_1 \frac{z}{h}\,,$$

so daß dann in der Tat $\sigma_{xT} = 0$ folgt. Während die übliche Rechnung mit unveränderlichen Stoffwerten also überhaupt keine Spannungen liefert, entstehen somit auch bei statisch bestimmt gelagerten Systemen Temperatur-Restspannungen. Sie bilden in jedem Querschnitt ein Gleichgewichtssystem, sind jedoch, wie das nachfolgende Beispiel zeigt, i. allg. vernachlässigbar klein (Abb. 7).

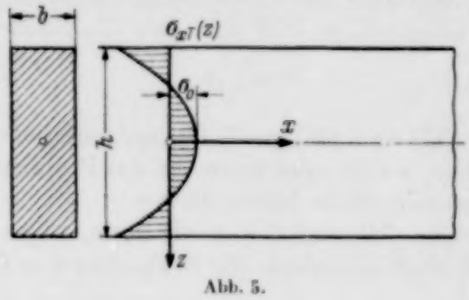


Abb. 5.

An einem freien Trägerende klingen diese ein Gleichgewichtssystem bildenden Restspannungen innerhalb eines sehr kleinen Randbereiches auf Null ab, wodurch sogar das Entstehen von Temperaturschubspannungen in diesem Randbereich bedingt ist. Diese sind jedoch wesentlich kleiner als die Temperatur-Restspannungen in einiger Entfernung vom Rande, so daß der Spannungszustand im Randbereich i. allg. nicht von Bedeutung ist. Man erkennt diesen Sachverhalt am einfachsten an einem Träger mit schmalem Rechteckquerschnitt (Abb. 5), in dem wir in erster Näherung einen ebenen Spannungszustand voraussetzen können, und an dessen freiem Ende $x = 0$ wir den Randspannungszustand $\sigma_x = -\sigma_{xT}(z)$ zusätzlich in Ansatz zu bringen haben, um insgesamt der Randbedingung der Spannungsfreiheit des Querschnittes $x = 0$ genügen zu können. Von diesem Randspannungszustand müssen weiterhin folgende Randbedingungen erfüllt werden:

$$\sigma_z = 0\,, \quad \tau_{xz} = 0 \quad \text{für} \quad z = \pm\frac{h}{2}$$

sowie

$$\sigma_x = 0\,, \quad \sigma_z = 0 \quad \text{und} \quad \tau_{xz} = 0 \quad \text{für} \quad \frac{x}{h} \to \infty\,.$$

Ein solcher, diese Randbedingungen sowie die Gleichgewichtsbedingungen des ebenen Spannungszustandes

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0\,, \qquad \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

erfüllender Zusatz-Spannungszustand läßt sich mit dem zunächst unbestimmten Faktor ω durch

$$\sigma_x(x, z) = -\left(1 + \omega\,\frac{x}{h}\right) e^{-\omega \frac{x}{h}}\, \sigma_{xT}(z)\,, \tag{59a}$$

$$\tau_{xz}(x, z) = -\,\omega \cdot \omega\,\frac{x}{h}\, e^{-\omega \frac{x}{h}} \int_{z/h = -1/2}^{z/h} \sigma_{xT}\, d\left(\frac{z}{h}\right) = -\,\omega \cdot \omega\,\frac{x}{h}\, e^{-\omega \frac{x}{h}}\, \Psi_1(z)\,, \tag{59b}$$

$$\sigma_z(x,z) = +\,\omega^2\left(1-\omega\frac{x}{h}\right)e^{-\omega\frac{x}{h}}\int_{z/h=-1/2}^{z/h}\left(\int_{z/h=-1/2}^{z/h}\sigma_{xT}\,d\left(\frac{z}{h}\right)\right)d\left(\frac{z}{h}\right)$$

$$= +\,\omega^2\left(1-\omega\frac{x}{h}\right)e^{-\omega\frac{x}{h}}\left[\frac{z}{h}\int_{z/h=-1/2}^{z/h}\sigma_{xT}\,d\left(\frac{z}{h}\right)-\int_{z/h=-1/2}^{z/h}\frac{z}{h}\,\sigma_{xT}\,d\left(\frac{z}{h}\right)\right]$$

$$= +\,\omega^2\left(1-\omega\frac{x}{h}\right)e^{-\omega\frac{x}{h}}\,\Psi_2(z) \qquad (59\,c)$$

charakterisieren[1], und dieser kann nunmehr aus der Minimalforderung für die Formänderungsenergie ermittelt werden, womit das Problem des Randbereiches näherungsweise gelöst ist.

Es ergibt sich schließlich, wenn man, wie in der Balkentheorie üblich, $l/h \gg 1$ voraussetzt, in guter Näherung mit den Abkürzungen

$$k_0 = \int_{-1/2}^{+1/2}\frac{\sigma_x^2 T}{E}\,d\left(\frac{z}{h}\right), \qquad k_1 = \int_{-1/2}^{+1/2}\frac{\Psi_1^2}{E}\,d\left(\frac{z}{h}\right), \qquad k_2 = \int_{-1/2}^{+1/2}\frac{\Psi_2^2}{E}\,d\left(\frac{z}{h}\right), \qquad k_3 = \int_{-1/2}^{+1/2}\frac{\sigma_{xT}\,\Psi_2}{E}\,d\left(\frac{z}{h}\right) \qquad (60)$$

die Formänderungsenergie

$$W = \frac{b}{2}\int_{x=0}^{l}\int_{z=-h/2}^{+h/2}\frac{1}{E}\left[\sigma_x^2+\sigma_z^2-2\,\nu\,\sigma_x\,\sigma_z+2\,(1+\nu)\,\tau_{xz}^2\right]dx\,dz$$

$$= \frac{b\,h^2}{2}\,\frac{1}{4\,\omega}\left[5\,k_0+2\left[(1+\nu)\,k_1+\nu\,k_3\right]\omega^2+k_2\,\omega^4\right],$$

und damit folgt aus $\partial W/\partial\omega = 0$ die biquadratische Gleichung

$$\omega^4+\frac{2}{3}\left[(1+\nu)\,\frac{k_1}{k_2}+\nu\,\frac{k_3}{k_2}\right]\omega^2-\frac{5}{3}\,\frac{k_0}{k_2}=0$$

mit der (einzigen positiven reellen) Lösung

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{3}\left[(1+\nu)\,\frac{k_1}{k_2}+\nu\,\frac{k_3}{k_2}\right]\left[\sqrt{1+15\,\frac{k_0/k_2}{\left[(1+\nu)\,\frac{k_1}{k_2}+\nu\,\frac{k_3}{k_2}\right]^2}}-1\right]}. \qquad (61)$$

Auf eine genauere zahlenmäßige Berechnung dieses Abklingungsfaktors sei hier verzichtet, und es wird lediglich eine Abschätzung unter Zugrundelegung eines konstanten mittleren Elastizitätsmoduls E_m durchgeführt. Setzt man für σ_{xT} die ein Gleichgewichtssystem darstellende quadratische Parabel

$$\sigma_{xT} = \sigma_0\,[1-12\,\zeta^2], \qquad (\zeta = z/h)$$

(Abb. 5) an, so wird

$$\Psi_1 = \sigma_0(\zeta-4\,\zeta^3), \qquad \Psi_2 = -\frac{\sigma_0}{16}(1-8\,\zeta^2+16\,\zeta^4) = -\frac{\sigma_0}{16}(1-4\,\zeta^2)^2$$

und

$$k_0 = \frac{\sigma_0^2}{E_m}\,\frac{4}{5}, \qquad k_1 = -k_3 = \frac{\sigma_0^2}{E_m}\,\frac{2}{105}, \qquad k_2 = \frac{\sigma_0^2}{E_m}\,\frac{1}{630},$$

so daß aus (61) (die Querkontraktionszahl fällt heraus) schließlich $\omega = 5{,}03$ hervorgeht. Damit sind die Spannungen im Sinne von (59) berechenbar. Eine Extremalrechnung liefert an den Stellen

$$\frac{x_0}{h} = \frac{1}{\omega} \approx 0{,}2, \qquad \frac{z_0}{h} = \pm\,\frac{1}{6}\sqrt{3} = \pm\,0{,}289$$

für die extremalen Schubspannungen

$$|\tau_{xz\,extr}| = \sigma_0\,\frac{\omega\sqrt{3}}{9\,e} \approx 0{,}356\,\sigma_0$$

und bei

$$\frac{x_0}{h} = \frac{2}{\omega} \approx 0{,}4, \qquad \frac{z_0}{h} = 0$$

für die größten Normalspannungen

$$\sigma_{z\,max} = \sigma_0\,\frac{\omega^2}{16\,e^2} \approx 0{,}214\,\sigma_0.$$

Von diesen Extremwerten fallen die Spannungen dann mit wachsenden x/h rasch auf Null ab, was man schon daran erkennt, daß $e^{-\omega x/h}$ für $x/h = 0{,}92$ bereits nur noch 0,01 ist.

[1] Diese Relationen liefern in der Tat $\sigma_z = \tau_{xz} = 0$ für $z = \pm\,\frac{h}{2}$, denn es sind $\int_{-h/2}^{+h/2}\sigma_{xT}\,dz = 0$ sowie $\int_{-h/h}^{+h/2} z\,\sigma_{xT}\,dz = 0$, da die Spannungen σ_{xT} nach Voraussetzung in einem Flächenquerschnitt ein Gleichgewichtssystem bilden!

Wir kommen nun zur Berechnung der Beiwerte $\varkappa$ nach (49), und zwar unter der Voraussetzung, daß die Balkenachse $z = 0$ gleichzeitig die Schwerlinie sei $\left(\int\limits_{(F)} z\,dF = 0\right)$, für ein linear anwachsendes Temperaturfeld[1]

$$\vartheta(z) = T_0 + T_1 \frac{z}{h} = T_0\left[1 + \frac{T_1}{T_0}\,\frac{z}{h}\right] = T_0\left[1 + \beta\,\frac{z}{h}\right] \qquad \left(\beta = \frac{T_1}{T_0}\right), \tag{62}$$

sowie für die Materialgesetze

$$E(\vartheta) = E_0 - E_2\,\vartheta^2 = E_0\left[1 - \frac{E_2\,T_0^2}{E_0}\left(1 + \beta\,\frac{z}{h}\right)^2\right] = E_0\left[1 - \zeta_1\left(1 + \beta\,\frac{z}{h}\right)^2\right] \qquad \left(\zeta_1 = \frac{E_2\,T_0^2}{E_0}\right), \tag{63}$$

$$\alpha_t(\vartheta) = \alpha_{t0} + \alpha_{t1}\,\vartheta = \alpha_{t0}\left[1 + \frac{\alpha_{t1}\,T_0}{\alpha_{t0}}\left(1 + \beta\,\frac{z}{h}\right)\right] = \alpha_{t0}\left[1 + 2\,\zeta_2\left(1 + \beta\,\frac{z}{h}\right)^2\right] \qquad \left(\zeta_2 = \frac{\alpha_{t1}\,T_0}{2\,\alpha_{t0}}\right). \tag{64}$$

Es ergibt sich mit den Querschnittswerten

$$J_y = \int\limits_{(F)} z^2\,dF\,, \quad J_y' = \frac{1}{h}\int\limits_{(F)} z^3\,dF\,, \quad J_y'' = \frac{1}{h^2}\int\limits_{(F)} z^4\,dF\,, \quad J_y''' = \frac{1}{h^3}\int\limits_{(F)} z^5\,dF, \qquad i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} \tag{65}$$

sowie den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned}
&B_1 = 1 - \zeta_1\left(1 + 2\,\beta\,\frac{J_y'}{J_y} + \beta^2\,\frac{J_y''}{J_y}\right), \quad B_2 = 1 - \zeta_1\left[1 + \beta^2\left(\frac{i_y}{h}\right)^2\right], \quad B_3 = \zeta_1\,\beta\,\frac{i_y}{h}\left(2 + \beta\,\frac{J_y'}{J_y}\right),\\
&D_1 = (1-\zeta_1)(1+\zeta_2) + \beta^2\left(\frac{i_y}{h}\right)^2(\zeta_2 - 3\zeta_1 - 6\zeta_1\zeta_2) - \zeta_1\beta^3\left(\frac{i_y}{h}\right)^2\frac{J_y'}{J_y}(1 + 4\zeta_2) - \zeta_1\zeta_2\beta^4\left(\frac{i_y}{h}\right)^2\frac{J_y''}{J_y},\\
&D_2 = 1 + 2\,\zeta_2 - 3\,\zeta_1 - 4\zeta_1\zeta_2 + \beta\,\frac{J_y'}{J_y}(\zeta_2 - 6\,\zeta_1\zeta_2 - 3\,\zeta_1) - \zeta_1\,\beta^2\,\frac{J_y''}{J_y}(1 + 4\,\zeta_2) - \zeta_1\zeta_2\beta^3\,\frac{J_y'''}{J_y}
\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

schließlich

$$\left.\begin{aligned}
&\varkappa_{SS} = \frac{B_1}{B_1\,B_2 - B_3^2}\,, \qquad \varkappa_{SM} = -\frac{\frac{h}{i_y}\,B_3}{B_1\,B_2 - B_3^2}\,, \qquad \varkappa_{MM} = \frac{B_2}{B_1\,B_2 - B_3^2}\,,\\
&\varkappa_{ST} = \frac{B_1\,D_1 + \beta\,\frac{i_y}{h}\,B_3\,D_2}{B_1\,B_2 - B_3^2}\,, \qquad \varkappa_{MT} = \frac{B_2\,D_2 + \frac{h}{\beta\,i_y}\,B_3\,D_1}{B_1\,B_2 - B_3^2}\,.
\end{aligned}\right\} \tag{67}$$

Zahlenbeispiel: Wir betrachten einen Stahlträger IP 20, an dessen Unter- bzw. Oberkante die Temperaturen $\vartheta_u = 350^\circ$ C bzw. $\vartheta_o = 250^\circ$ C herrschen sollen. Demnach sind $T_0 = \frac{1}{2}(\vartheta_o + \vartheta_u) = 300^\circ$ C, $T_1 = \vartheta_u - \vartheta_o = 100^\circ$ C, und für die Stoffwerte hat man

$$E_0 = 2{,}1 \cdot 10^6\ \mathrm{kg/cm^2}, \qquad E_2 = 2{,}1\ \mathrm{kg/cm^2\,{}^\circ C^2} \qquad (200^\circ\ \mathrm{C} \leqq \vartheta \leqq 400^\circ\ \mathrm{C}),$$
$$\alpha_{t0} = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-1}, \qquad \alpha_{t1} = 1{,}0 \cdot 10^{-8}\ {}^\circ\mathrm{C}^{-2}.$$

Es ist also

$$\beta = \frac{T_1}{T_0} = \frac{1}{3}\,, \qquad \zeta_1 = \frac{E_2\,T_0^2}{E_0} = 0{,}09\,, \qquad \zeta_2 = \frac{\alpha_{t1}\,T_0}{2\,\alpha_{t0}} = 0{,}125$$

und die Querschnittswerte betragen

$$F = 82{,}7\ \mathrm{cm^2}, \qquad J_y = 5950\ \mathrm{cm^4}, \qquad J_y' = J_y''' = 0\,,$$
$$J_y'' = \frac{1}{h^2}\int\limits_{(F)} z^4\,dF = \frac{b\,h^3}{80}\left[1 - \left(1 - \frac{d}{b}\right)\left(1 - 2\,\frac{t}{h}\right)^5\right] = 1205\ \mathrm{cm^4}.$$

(b = Flanschbreite, t = Flanschdicke, d = Stegdicke).
Mit diesen Zahlen erhält man schließlich

$$\varkappa_{SS} = 1{,}101\,943\,, \qquad \varkappa_{SM} = \varkappa_{MS} = -\,0{,}072\,818\,, \qquad \varkappa_{MM} = 1{,}102\,218\,,$$
$$\varkappa_{ST} = 1{,}127\,497\,, \qquad \varkappa_{MT} = 1{,}249\,937\,,$$

und man erkennt hieran, daß sich z. B. reine Biegedeformationen an diesem Träger um $(\varkappa_{MM} - 1) \times 100 = 10\%$, die aus einer ungleichmäßigen Erwärmung hervorgehenden Temperaturdurchsenkungen sogar um $(\varkappa_{MT} - 1)\ 100 = 25\%$ gegenüber denjenigen, die mittels unveränderlicher Stoffwerte berechnet werden, vergrößern. Hier können also schon merkliche Unterschiede gegenüber der Rechnung mit unveränderlichen Stoffwerten auftreten.

[1] Das genaue Temperaturfeld ist mit Hilfe von (21b) ermittelbar, jedoch kann man dieses, sofern die Randtemperaturen, d. h. T_0 und T_1 vorgegeben sind, bei Stahlträgern mit ausgezeichneter Genauigkeit durch (62) annähern.

Aus (51) ergeben sich damit folgende Spannungen

a) infolge alleiniger Längskraftbelastung

$$\frac{\sigma_{x,S}}{S/F} = \left[1 - \zeta_1 \left(1 + \beta \frac{z}{h}\right)^2\right] \left[\varkappa_{SS} - \varkappa_{MS} \frac{z}{h}\right],$$

b) infolge alleiniger Momentenbelastung

$$\frac{\sigma_{x,M_y}}{M_y/W} = 2 \left[1 - \zeta_1 \left(1 + \beta \frac{z}{h}\right)^2\right] \left[-\varkappa_{MS} \left(\frac{i_y}{h}\right)^2 + \varkappa_{MM} \frac{z}{h}\right],$$

c) Wärmespannungen

$$\sigma_{xT} = E_0 \alpha_{t0} T_0 \left[1 - \zeta_1 \left(1 + \beta \frac{z}{h}\right)^2\right] \left[(\varkappa_{ST} - 1) + \beta (\varkappa_{MT} - 1) \frac{z}{h} - \zeta_2 \left(1 + \beta \frac{z}{h}\right)^2\right].$$

In Abb. 6 sind die Spannungszuwächse

$$\frac{\triangle \sigma}{M_y/W} = \frac{\sigma_{x,M_y} - \dfrac{M_y z}{J_y}}{M_y/W} = \frac{\sigma_{x,M_y}}{M_y/W} - 2\frac{z}{h}, \qquad \frac{\triangle \sigma}{S/F} = \frac{\sigma_{x,S} - \dfrac{S}{F}}{S/F} = \frac{\sigma_{x,S}}{S/F} - 1$$

gegenüber den üblichen Balkenspannungen dargestellt. Man erkennt die sehr geringen Abweichungen, und sieht auch am Beispiel des Stabes, daß die Veränderung des Spannungszustandes infolge einer rein mechanischen Belastung bei Vorhandensein eines Temperaturfeldes nur sehr

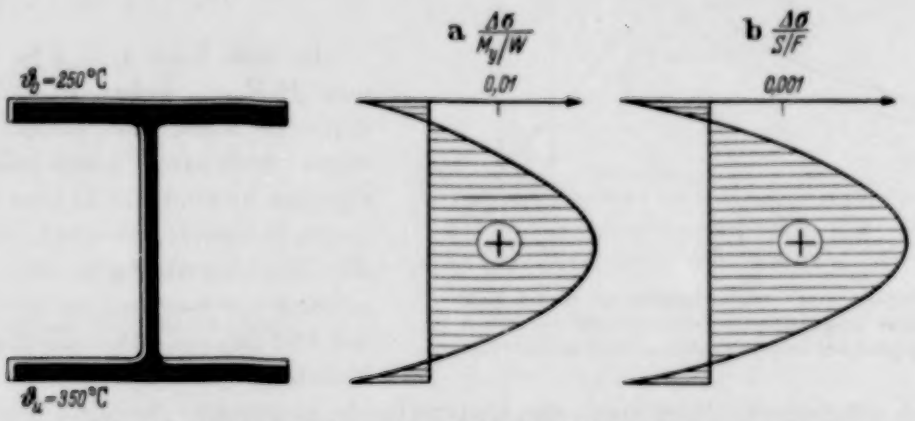


Abb. 6. Spannungszuwächse $\triangle \sigma$ gegenüber den üblichen Balkenspannungen.
a) Biegebeanspruchung; b) Normalkraftbeanspruchung.

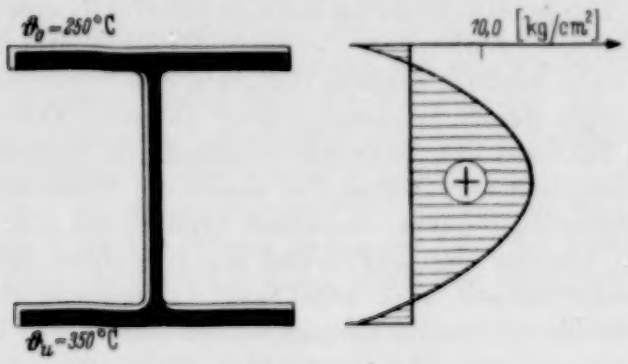


Abb. 7. Wärme-Restspannungen.

geringfügig ist. In Abb. 7 sind die Wärme-Restspannungen dargestellt. Auch diese sind im vorliegenden Falle nicht erheblich (sie können größer werden, wenn zwischen Ober- und Unterkante des Stabes größere Temperaturdifferenzen herrschen).

Zum Abschluß untersuchen wir noch das Problem der Längskraft-Biegung eines beidseitig gelenkig gelagerten Stabes bei gleichzeitigem Vorhandensein eines ungleichmäßigen Temperaturfeldes. Ausgehend von (54) erhalten wir mit

$$M_y(x) = P\, w(x), \qquad S(x) = -P$$

die Differentialgleichung

$$w'' + \varkappa_{MM} \frac{P}{E_0 J_y} w = -\left(\varkappa_{MS} \frac{P}{E_0 F h} + \frac{\alpha_{t0} T_1}{h} \varkappa_{MT}\right)$$

mit der allgemeinen Lösung

$$w(x) = -h\left(\frac{i_y}{h}\right)^2\left(\frac{\varkappa_{MS}}{\varkappa_{MM}} + \frac{\varkappa_{MT}}{\varkappa_{MM}}\frac{E_0\,\alpha_{10}\,T_1\,F}{P} + C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x\right) \quad \left(i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}},\ \lambda = \sqrt{\varkappa_{MM}}\sqrt{\frac{P}{E_0 J_y}}\right).$$

Die Integrationskonstanten werden aus den Randbedingungen $w(0) = 0$ und $w(l) = 0$ zu

$$C_1 = -\left(\frac{\varkappa_{MS}}{\varkappa_{MM}} + \frac{\varkappa_{MT}}{\varkappa_{MM}}\frac{E_0\,\alpha_{10}\,T_1\,F}{P}\right), \qquad C_2 = -\left(\frac{\varkappa_{MS}}{\varkappa_{MM}} + \frac{\varkappa_{MT}}{\varkappa_{MM}}\frac{E_0\,\alpha_{10}\,T_1\,F}{P}\right)\frac{1-\cos\lambda l}{\sin\lambda l}$$

bestimmt, so daß damit letztlich für die Durchbiegungen

$$w(x) = h\left(\frac{i_y}{h}\right)^2\left(\frac{\varkappa_{MS}}{\varkappa_{MM}} + \frac{\varkappa_{MT}}{\varkappa_{MM}}\frac{E_0\,\alpha_{10}\,T_1\,F}{P}\right)\left(\frac{\sin\lambda x}{\sin\lambda l} + \frac{\sin\lambda(l-x)}{\sin\lambda l} - 1\right)$$

und insbesondere für den Biegungspfeil in Balkenmitte

$$f = w\left(\frac{l}{2}\right) = h\left(\frac{i_y}{h}\right)^2\left(\frac{\varkappa_{MS}}{\varkappa_{MM}} + \frac{\varkappa_{MT}}{\varkappa_{MM}}\frac{E_0\,\alpha_{10}\,T_1\,F}{P}\right)\left(\frac{1}{\cos\frac{\lambda l}{2}} - 1\right)$$

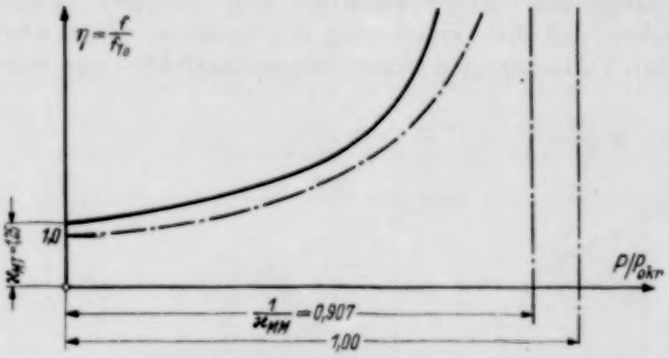


Abb. 8. Längskraft-Biegung eines ungleichmäßig erwärmten Stabes.
——— genauerer Biegepfeil;
—·—·— Biegepfeil bei unveränderlichen Stoffwerten (E_0, α_{10}).

hervorgeht. Für $P = 0$ und unveränderliche Stoffwerte folgt daraus

$$f_{T_0} = \frac{1}{8}\alpha_{10}\,T_1\left(\frac{l}{h}\right)^2 h\,.$$

In Abb. 8 ist $\eta = f/f_{T_0}$ in Abhängigkeit von P/P_{okr}, wobei $P_{okr} = \pi^2 E_0 J_y/l^2$ die kritische Last für unveränderliche Stoffwerte bedeutet, graphisch dargestellt (es wurden hierbei die Zahlen des vorangegangenen Beispiels benutzt). Man erkennt, daß die Durchsenkungen mit wachsendem P schneller anwachsen (sie sind schon für $P = 0$ um 100 $(\varkappa_{MT} - 1) = 25\%$ größer als die in üblicher Weise berechneten), und daß sich die kritische Last verringert. Hier sind die Unterschiede zumindest bei den Verformungen und damit für die Momente und Spannungen schon kaum noch vernachlässigbar.

5. Zusammenfassung. Die in Ziffer 4 untersuchten Beispiele zeigten, daß sich bei Vorhandensein eines ungleichmäßigen Temperaturfeldes im Bereich höherer Temperaturen nicht nur die reinen Wärmespannungsfelder gegenüber denjenigen, die unter der Voraussetzung unveränderlicher Stoffwerte berechnet werden können, ändern, sondern daß auch eine Veränderung der durch rein mechanische Einwirkungen hervorgerufenen Spannungsfelder auftritt. Diese lassen sich bei Systemen aus Stahl i. a. (sofern nicht extreme Temperaturunterschiede im System vorhanden sind) vernachlässigen bis auf die Klasse derjenigen Probleme, bei denen die Spannungen am verformten System von denjenigen am unverformten System wesentlich verschieden sind (z. B. bei der Längskraft-Biegung). In diesen Fällen können sich auf Grund der gegenüber der Theorie unveränderlicher Materialwerte größeren Verformungen auch erhebliche Änderungen der Spannungszustände einstellen, so daß man hier die Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte berücksichtigen sollte. Die Änderung der reinen Wärmespannungsfelder gegenüber denjenigen, die mittels unveränderlicher Materialwerte bestimmt werden können, ist in der Regel, d. h. wenn die Temperaturunterschiede innerhalb des Systems nicht extrem groß sind, noch nicht allzu groß, so daß man sich auch im Bereich höherer Temperaturen mit der Theorie unveränderlicher Materialwerte E und α_t begnügen können wird, vor allem dann, wenn man die einer mittleren Systemtemperatur entsprechenden Werte benutzt. Dies ist aber, wie der Verfasser schon früher gezeigt hat, i. a. nur dann vertretbar, wenn man der Spannungsberechnung das genaue, die Temperaturveränderlichkeit der Wärmeleitzahl berücksichtigende Temperaturfeld zugrunde legt, da dieses in manchen Fällen von dem mit konstanter Wärmeleitzahl berechneten merklich abweichen kann.

(Eingegangen am 4. März 1958.)

Anschrift des Verfassers: Priv. Doz. Dr.-Ing. *Rudolf Trostel*, Techn. Universität Berlin, Lehrst. f. Mechanik (Prof. Dr.Ing. *I. Szabó*), Berlin-Charlottenburg 2, Hardenbergstr. 34.

Die Kreiszylinderschale mit kreisförmigem Ausschnitt unter Schubbeanspruchung*

Von D. Withum

1. Einleitung. Wird ein dünnwandiges Kreisrohr an seinen Enden durch Torsionsmomente belastet, so erleidet seine Wandung eine reine Schubbeanspruchung. Dieser gleichförmige Spannungszustand erfährt in der Nachbarschaft eines Loches (Abb. 1) eine örtliche Störung, die mit erheblichen Spannungsspitzen verbunden ist. Bereits 1898 wurde dieses Problem von *G. Kirsch*[1] für den Sonderfall der unendlich ausgedehnten Scheibe, also bei verschwindender Schalenkrümmung gelöst. Danach steigen am Lochrand die Hauptspannungen auf das Vierfache an. Zahlreiche Versuche[2] zeigten, daß bei endlichem Schalenhalbmesser jedoch wesentlich höhere Spannungsspitzen auftreten können, so daß eine genauere theoretische Untersuchung wünschenswert erscheint.

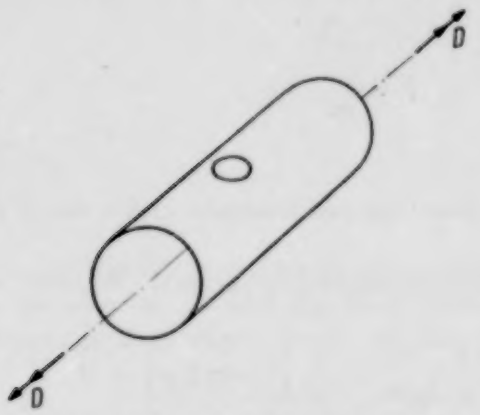


Abb. 1. Kreiszylinderschale mit Ausschnitt unter Torsionsbelastung.

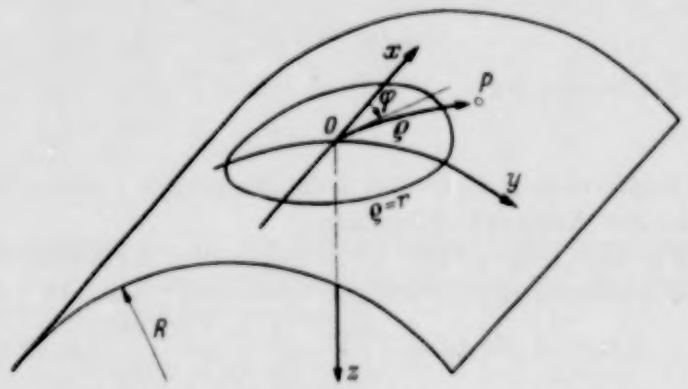


Abb. 2. Koordinatensysteme der Kreiszylinderschale.

Eine solche wurde von *D. Thoma* und *M. Schilhansl*[3] mit Hilfe einer Näherungsrechnung durchgeführt. Infolge zu grober Annahmen ergaben sich jedoch keine einwandfreien Ergebnisse. Während der Abfassung der vorliegenden Arbeit wurde ferner ein Aufsatz von *A. I. Lurje*[4] bekannt, der die auf Zug beanspruchte und durch ein Kreisloch geschwächte Zylinderschale behandelt. *A. I. Lurje* geht von der gleichen Differentialgleichung aus, die auch dieser Arbeit zugrunde liegt, wählt jedoch einen anderen Lösungsweg und beschränkt sich auf sehr kleine Löcher.

Im folgenden wird das Problem unter Berücksichtigung der Biegetheorie der Kreiszylinderschalen mit Hilfe der Störungsrechnung gelöst. Für sehr kleine Lochdurchmesser wird die Lösung in geschlossener Form dargestellt. Anhand einiger Zahlenbeispiele werden die Konvergenz des Verfahrens nachgewiesen und die Spannungszustände bei Schale und Scheibe miteinander verglichen. Schließlich wird noch ein Diagramm angegeben, das bei beliebigen Schalenabmessungen unmittelbar die maximale Spannung am Lochrand abzulesen gestattet.

2. Rechnungsannahmen und Voraussetzungen. Es gelten die üblichen Annahmen der Schalenbiegetheorie. Ferner wird vorausgesetzt, daß die vom Lochrand ausgehenden Störungen bis zum

* Gekürzte Fassung einer von der Fakultät für Bauwesen der Technischen Hochschule Hannover genehmigten Dissertation. Referent: Prof. Dr.-Ing. habil. *A. Pflüger*, Korreferent: Prof. Dr.-Ing. *W. Zerna*. — Der Verfasser ist den Referenten für wertvolle Anregungen und großzügige Unterstützung zu Dank verpflichtet.

[1] *G. Kirsch*, Z. VDI 42 (1898), S. 797.

[2] *A. Thum* und *O. Petri*, Steifigkeit und Verformung von Kastenquerschnitten, VDI-Forschungsheft 409, Beilage zu Forschung auf dem Gebiet des Ingenieurwesens, Ausgabe B, 12 (1941); *W. Bergmann*, Grundl. d. Landtechnik, Heft 4, S. 12, Düsseldorf 1953; *F. R. Schlechte* und *R. Rosecrans*, Experimental Stress Analysis of Stiffened Cylinders with Cutouts — Pure Torsion, NACA TN 3039, Washington D. C. 1953; *H. G. McComb*, Stress Analysis of Circular Semimonocoque Cylinders with Cutouts, NACA, Washington D. C. 1955; *P. Kuhn*, Stresses in Aircraft and Shell Structures, New York Toronto London 1956.

[3] *D. Thoma* und *M. Schilhansl*, Luftf.-Forsch. 19 (1942), S. 210.

[4] *A. I. Lurje*, Prikladnaja Matematika i Mekhanika, Neue Serie 10, 3, Moskau 1946, S. 397. — Auszug in deutscher Sprache im Buche von *G. N. Sawin*, Spannungserhöhung am Rande von Löchern, S. 130, Berlin 1956.

Schalenrand hin abgeklungen sind, und daß bei geschlossenen Rohren die Randstörungen sich nicht über den Zylinderumfang hinweg gegenseitig beeinflussen.

3. Biegetheorie der Kreiszylinderschale. a) Geometrie. Zur Beschreibung eines beliebigen Punktes P (Abb. 2) der Schalenmittelfläche wird ein orthogonales Koordinatensystem verwendet, das bei Abwicklung des Zylindermantels in die Ebene in ein Polarkoordinatensystem übergeht. Mit den üblichen Zylinderkoordinaten x, y ist dieses Koordinatensystem (ϱ, φ) durch die Transformationsformeln

$$\left.\begin{aligned} x &= \varrho \cos\varphi, \\ y &= \varrho \sin\varphi \end{aligned}\right\} \quad (-\pi R < \varrho \sin\varphi \leqq +\pi R) \tag{1}$$

verknüpft. Dabei bezeichnet R den Schalenhalbmesser. Die Koordinatenlinien $\varphi = \text{konst.}$ sind Schraubenlinien der Schalenmittelfläche. Der Lochrand wird durch die Koordinate $\varrho = r$ beschrieben, und der Lochmittelpunkt fällt mit dem Ursprung 0 zusammen.

b) Differentialgleichung. Werden in der Schalenbiegetheorie gewisse Vereinfachungen vorgenommen, die u. a. von *A. E. Green* und *W. Zerna*[1] begründet wurden, so läßt sich das Problem auf eine einzige partielle Differentialgleichung vierter Ordnung für eine komplexe Spannungsfunktion ψ zurückführen. Aus dieser können nach Abschnitt c) die Schnittgrößen und die Radialverschiebungen in einfacher Weise ermittelt werden. Nach *W. Zerna*[2] gilt

$$\Delta\Delta\psi - 2\,i\,\alpha^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = 0 \quad \text{mit} \quad \alpha = +\frac{\sqrt[4]{3\,(1-\mu^2)}}{\sqrt{R\,t}}. \tag{2}$$

Hierbei bezeichnet

$$\Delta\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$$

den *Laplace*schen Operator, i die imaginäre Einheit, μ die Querkontraktionszahl und t die Wandstärke der Kreiszylinderschale.

Wie sich zeigen läßt, ist ψ gegenüber Koordinatentransformationen invariant. Wendet man die Transformation (1) auf die Gleichung (2) an, so folgt:

$$\Delta\Delta\psi + i\,\alpha^2\left[\Delta\psi + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\varrho^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} - \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right)\cos 2\varphi - \left(\frac{2}{\varrho}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varrho\,\partial\varphi} - \frac{2}{\varrho^2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\sin 2\varphi\right] = 0, \tag{3}$$

wobei der *Laplace*sche Operator die Form

$$\Delta\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial\psi}{\partial\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}$$

annimmt. Wird nun noch eine dimensionslose komplexe Veränderliche

$$\zeta = +\alpha\,\varrho\sqrt{i} = +\xi\sqrt{i} \tag{4}$$

eingeführt, und definiert man

$$\Delta^*\psi \equiv -\frac{i}{\alpha^2}\Delta\psi \equiv \frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} + \frac{1}{\zeta^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2},$$

so lautet die Differentialgleichung (3):

$$\Delta^*(\Delta^*\psi + \psi) + \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta^2} - \frac{1}{\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta} - \frac{1}{\zeta^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right)\cos 2\varphi - \left(\frac{2}{\zeta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\zeta\,\partial\varphi} - \frac{2}{\zeta^2}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\right)\sin 2\varphi = 0. \tag{5}$$

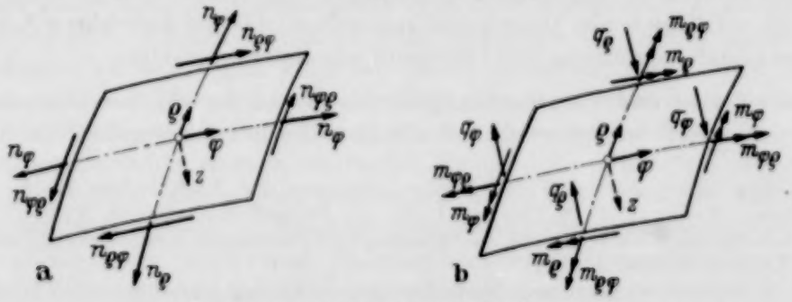


Abb. 3. Schalenelement mit Schnittgrößen.
a) Längskräfte und Schubkräfte, b) Momente und Querkräfte.

c) Schnittgrößen und Formänderungen. Aus Abb. 3 sind die positiven Richtungen der Schnittgrößen ersichtlich. Die Verschiebungskomponenten längs der positiven Koordinatenrichtungen ϱ, φ und z werden mit u, v und w bezeichnet.

[1] *A. E. Green* und *W. Zerna*, Theoretical Elasticity, S. 385, Oxford 1954.
[2] *W. Zerna*, Ing.-Arch. 20 (1952), S. 357.

Setzt man mit dem Elastizitätsmodul E

$$\varkappa = + \frac{2}{E t^2} \sqrt{3 (1 - \mu^2)}$$

und führt die aus der Scheibentheorie bekannte *Airy*sche Spannungsfunktion Φ ein, so gilt nach *W. Zerna*[1]

$$w = \Re \mathfrak{e}\, \psi \quad \text{und} \quad \Phi = \frac{1}{\varkappa} \Im \mathfrak{m}\, \psi . \tag{6}$$

Hieraus ergeben sich die Schnittgrößen zu

$$n_\varrho = \frac{\alpha^2}{\xi^2} \left(\xi \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} \right), \tag{7a}$$

$$n_\varphi = \alpha^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2}, \tag{7b}$$

$$n_{\varrho\varphi} = \frac{\alpha^2}{\xi^2} \left(- \xi \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \, \partial \varphi} + \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right), \tag{7c}$$

$$m_\varrho = - B \frac{\alpha^2}{\xi^2} \left(\xi^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \mu \xi \frac{\partial w}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \tag{7d}$$

$$m_\varphi = + B \frac{\alpha^2}{\xi^2} \left(\mu \xi^2 \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \xi \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right), \tag{7e}$$

$$m_{\varrho\varphi} = + (1 - \mu) B \frac{\alpha^2}{\xi^2} \left(\xi \frac{\partial^2 w}{\partial \xi \, \partial \varphi} - \frac{\partial w}{\partial \varphi} \right). \tag{7f}$$

Mit

$$B = \frac{E t^3}{12 (1 - \mu^2)}$$

ist dabei die Biegesteifigkeit der Schale gekennzeichnet. Da die Schubkraftverformungen vernachlässigt werden, so sind die Querkräfte nur über die Gleichgewichtsbedingungen mit den Schnittmomenten und damit auch mit der Radialverschiebung w verknüpft:

$$q_\varrho = - B \alpha \frac{\partial (\Delta w)}{\partial \xi} = + \frac{\alpha}{1 + \mu} \frac{\partial M}{\partial \xi}, \tag{7g}$$

$$q_\varphi = - B \frac{\alpha}{\xi} \frac{\partial (\Delta w)}{\partial \varphi} = + \frac{1}{1 + \mu} \frac{\alpha}{\xi} \frac{\partial M}{\partial \varphi}. \tag{7h}$$

Hierbei ist zur Abkürzung

$$m_\varrho - m_\varphi = - (1 + \mu) B \Delta w = M \tag{8}$$

gesetzt.

Da mit der Differentialgleichung (5) an jedem Schalenrand nur vier Randbedingungen erfüllt werden können, werden in üblicher Weise für den Rand $\xi =$ konst. das Drillmoment und die Querkraft zur Randquerkraft

$$q_\varrho^* = q_\varrho - \frac{\alpha}{\xi} \frac{\partial m_{\varrho\varphi}}{\partial \varphi} \tag{9}$$

zusammengenommen.

Setzt man ferner

$$\Delta^* \psi = \Omega . \tag{10}$$

so stellt

$$\Omega = 2 R \left(\frac{1}{E t} N + i \frac{\varkappa}{1 + \mu} M \right) \tag{11}$$

eine weitere komplexe Spannungsfunktion dar, wobei entsprechend (8) die Abkürzung

$$N = n_\varrho + n_\varphi = \Delta \Phi \tag{12}$$

eingeführt ist.

Die Verzerrungen der Schalenmittelfläche sind durch das *Hooke*sche Gesetz

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\varrho &= \frac{1}{E t} (n_\varrho - \mu n_\varphi), \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E t} (n_\varphi - \mu n_\varrho), \\ \gamma_{\varrho\varphi} &= \frac{2 (1 + \mu)}{E t} n_{\varrho\varphi} \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

[1] Siehe Fußnote 2 von Seite 436.

mit den Schnittkräften verknüpft. Schließlich bestehen zwischen den Verschiebungen der Schalenmittelfläche und den Verzerrungen die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\varrho &= \alpha \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{w}{2R}(1 - \cos 2\varphi), \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{\alpha}{\xi}\left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u\right) + \frac{w}{2R}(1 + \cos 2\varphi), \\ \gamma_{\varrho\varphi} &= \frac{\alpha}{\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v + \xi \frac{\partial v}{\partial \xi}\right) + \frac{w}{R} \sin 2\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Damit haben wir alle erforderlichen Formeln zusammengestellt, um die Zylinderschale mit kreisförmigem Ausschnitt behandeln zu können.

4. Spannungs- und Formänderungszustand der ungeschwächten Schale. Die bei der ungeschwächten Schale auftretenden Zustandsgrößen werden durch einen Querstrich gekennzeichnet.

Das Drillmoment D (Abb. 1) ruft in der geschlossenen Schale einen konstanten Schubfluß

$$T = \frac{D}{2\pi R^2}, \tag{15}$$

bezogen auf die Zylinderkoordinaten x, y (Abb. 2), hervor. Entsprechend verschwinden im Koordinatensystem (ϱ, φ) sämtliche Schnittgrößen mit Ausnahme von

$$\left.\begin{aligned} \bar{n}_\varrho &= +T \sin 2\varphi, \\ \bar{n}_\varphi &= -T \sin 2\varphi, \\ \bar{n}_{\varrho\varphi} &= +T \cos 2\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Für die *Airy*sche Spannungsfunktion ergibt sich

$$\bar{\Phi} = -\frac{\xi^2}{\alpha^2}\frac{T}{2} \sin 2\varphi, \tag{17a}$$

während

$$\bar{\Omega} = 0 \tag{17b}$$

ist. Für die Verschiebungen gilt

$$\left.\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1+\mu}{Et}\frac{\xi}{\alpha} T \sin 2\varphi, \\ \bar{v} &= \frac{1+\mu}{Et}\frac{\xi}{\alpha} T(1 + \cos 2\varphi), \\ \bar{w} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

5. Das Randstörungsproblem der geschwächten Schale. Ist in der Schale ein kreisförmiger Ausschnitt vorhanden, so kann der Spannungs- und Formänderungszustand aus zwei Anteilen zusammengesetzt werden. Der erste Anteil besteht aus den Beanspruchungen und Verformungen der ungeschwächten Schale, während der zweite von einer Randbelastung des Loches hervorgerufen wird. Diese besteht aus einer Gleichgewichtsgruppe, die den in (16) angegebenen Schnittgrößen das Gleichgewicht hält. Die zugehörigen Zustandsgrößen seien mit $\sim$ geschlängelt überstrichen. Die endgültigen Schnittgrößen und Verformungen können dann durch Überlagerung ermittelt werden.

a) Randbedingungen. Der Schalenausschnitt werde durch die Koordinate $\xi = \xi_0 = \alpha r$ begrenzt. Dann gelten die Randbedingungen

$$\left.\begin{aligned} \tilde{n}_\varrho &= -T \sin 2\varphi, \qquad m_\varrho = 0, \\ \tilde{n}_{\varrho\varphi} &= -T \cos 2\varphi, \qquad q_\varrho^* = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \xi = \xi_0. \tag{19}$$

Für $\xi \to \infty$ müssen die infolge der Randbelastung (19) auftretenden Schnittgrößen nach dem *De Saint Venant*schen Prinzip verschwinden.

b) *Fourier*analyse. Die Zylinderschale ist symmetrisch in bezug auf die Koordinatenlinien $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi/2$. Der Spannungszustand ist für diese Koordinaten antisymmetrisch und mit $\varphi = \pi$ periodisch. Die Längskräfte $\tilde{n}_\varrho$ müssen daher in folgender Form in eine *Fourier*-Reihe entwickelbar sein:

$$\tilde{n}_\varrho = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{n}_{\varrho n} \sin 2n\varphi. \tag{20a}$$

Entsprechend lassen sich die Zustandsgrößen $\tilde{n}_\varphi$, m_ϱ, m_φ, q_ϱ, q_ϱ^*, N, M, $\tilde{\varepsilon}_\varrho$, $\tilde{\varepsilon}_\varphi$, $\tilde{u}$, w und die Spannungsfunktionen darstellen. Für die Schubkräfte $\tilde{n}_{\varrho\varphi}$ ergibt sich eine in bezug auf $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi/2$ symmetrische Entwicklung:

$$\tilde{n}_{\varrho\varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{n}_{\varrho\varphi_n} \cos 2\,n\,\varphi\,. \tag{20b}$$

Die Zustandsgrößen $m_{\varrho\varphi}$, q_φ, $\tilde{\gamma}_{\varrho\varphi}$ können in gleicher Weise entwickelt werden. Schließlich gilt für die Verschiebungskomponente $\tilde{v}$ die Reihendarstellung

$$\tilde{v} = \frac{1}{2}\,\tilde{v}_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{v}_n \cos 2\,n\,\varphi\,. \tag{20c}$$

Mit diesen Ansätzen wird die partielle Differentialgleichung (5) in ein gekoppeltes System gewöhnlicher Differentialgleichungen vierter Ordnung

$$\left.\begin{aligned} &\Delta^*(\Delta^*\tilde{\psi}_n + \tilde{\psi}_n) + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\tilde{\psi}_{n-1}}{d\zeta^2} - \frac{4\,n-3}{2\,\zeta}\,\frac{d\tilde{\psi}_{n-1}}{d\zeta} + \frac{2\,n\,(n-1)}{\zeta^2}\,\tilde{\psi}_{n-1} \\ &\quad + \frac{1}{2}\,\frac{d^2\tilde{\psi}_{n+1}}{d\zeta^2} + \frac{4\,n+3}{2\,\zeta}\,\frac{d\psi_{n+1}}{d\zeta} + \frac{2\,n\,(n+1)}{\zeta^2}\,\tilde{\psi}_{n+1} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,, \\ &\qquad \tilde{\psi}_0 \equiv 0 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

umgeformt, wobei der *Laplace*sche Operator die Form

$$\Delta^*\tilde{\psi}_n = \Omega_n \equiv \frac{d^2\tilde{\psi}_n}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\,\frac{d\tilde{\psi}_n}{d\zeta} - \frac{4\,n^2}{\zeta^2}\,\tilde{\psi}_n \tag{22a}$$

annimmt.

Es ist zweckmäßig, ein entsprechendes Gleichungssystem für die Funktionen Ω_n aufzustellen. Wird (22a) nach $\tilde{\psi}_n$ aufgelöst, so ist

$$\tilde{\psi}_n = \zeta^{2n} \int \zeta^{-4n-1} \int \zeta^{2n+1}\,\Omega_n\,d\zeta\,d\zeta\,. \tag{22b}$$

Setzt man diesen Ausdruck in (21) ein, dann verschwinden die Doppelintegrale, und es folgt

$$\left.\begin{aligned} &\Delta^*\Omega_n + \Omega_n + \frac{1}{2}\,\Omega_{n-1} - (2\,n-1)\,\zeta^{-2n} \int \zeta^{2n-1}\,\Omega_{n-1}\,d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2}\,\Omega_{n+1} + (2\,n+1)\,\zeta^{2n} \int \zeta^{-2n-1}\,\Omega_{n+1}\,d\zeta = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)\,, \\ &\qquad \Omega_0 \equiv 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Führt man die Ansätze (20) in das Differentialgleichungssystem (14) ein, so erhält man aus einem Koeffizientenvergleich

$$\tilde{\varepsilon}_{\varrho n} = \alpha\,\tilde{u}_n' - \frac{1}{2\,R}\left(w_n - \frac{1}{2}\,w_{n-1} - \frac{1}{2}\,w_{n+1}\right), \tag{24a}$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\varphi n} = \frac{\alpha}{\xi}\,(-2\,n\,\tilde{v}_n + \tilde{u}_n) + \frac{1}{2\,R}\left(w_n + \frac{1}{2}\,w_{n-1} + \frac{1}{2}\,w_{n+1}\right), \tag{24b}$$

$$\tilde{\gamma}_{\varrho\varphi n} = \frac{\alpha}{\xi}\,(2\,n\,\tilde{u}_n - \tilde{v}_n + \xi\,\tilde{v}_n') + \frac{1}{2\,R}\,(w_{n+1} - w_{n-1})\,, \tag{24c}$$

wobei $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$,

$$\tilde{\varepsilon}_{\varrho 0} = \tilde{\varepsilon}_{\varphi 0} = \tilde{\gamma}_{\varrho\varphi 0} = \tilde{u}_0 = w_0 = 0$$

und

$$w_{-1} = -\,w_{+1}$$

zu setzen ist. Ableitungen nach ξ sind durch einen Strich gekennzeichnet.

Aus den Randbedingungen (19) wird

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{n}_{\varrho n} = \left\{\begin{matrix} -\,T \text{ für } n = 1 \\ 0 \text{ für } n > 1 \end{matrix}\right\}, \quad \tilde{n}_{\varrho\varphi n} = \left\{\begin{matrix} -\,T \text{ für } n = 1 \\ 0 \text{ für } n > 1 \end{matrix}\right\}, \\ &m_{\varrho n} = 0\,, \qquad\qquad q_{\varrho n}^* = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für } \xi = \xi_0\,. \tag{25}$$

Werden die Schnittgrößen durch die Spannungsfunktion $\tilde{\Phi}$ und die Radialverschiebung w ausgedrückt, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Reihenansätze (20) nach einigen kleineren Umformungen

$$\left.\begin{aligned}
&\xi_0 \tilde{\Phi}_n' + 2\,n\,\tilde{\Phi}_n = \begin{cases} 2\,r^2\,T & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{für } n > 1 \end{cases}, \\
&\xi_0^3 w_n''' - (2\,n-1)\,\xi_0^2 w_n'' - [8\,n^2 + 1 - 2\,n\,\mu\,(2\,n-1)]\,\xi_0 w_n' \\
&\qquad + 4\,n^2\,[3 + \mu\,(2\,n-1)]\,w_n = 0\,, \\
&\tilde{\Phi}_n = \begin{cases} \dfrac{r^2\,T}{2} & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{für } n > 1 \end{cases}, \\
&\xi_0^2 w_n'' + \mu\,\xi_0 w_n' - \mu\,4\,n^2 w_n = 0
\end{aligned}\right\} \quad \text{für } \xi = \xi_0\,. \qquad (26)$$

Für $\xi \to \infty$ muß jedes Reihenglied der Schnittgrößen einzeln verschwinden.

c) Störungsrechnung. Wird der Lochrand $\varrho = r$ einer unendlich ausgedehnten Scheibe durch eine mit $\sin 2\,n\,\varphi$ veränderliche Belastung beansprucht, so ist der Spannungszustand in der Nachbarschaft des Loches ebenfalls mit $\sin 2\,n\,\varphi$ bzw. $\cos 2\,n\,\varphi$ veränderlich. Dies rührt daher, daß bei der rotationssymmetrischen Scheibe keine Richtung φ geometrisch bevorzugt ist. Bei der Zylinderschale geht die Rotationssymmetrie verloren, die Hauptkrümmungslinien sind ausgezeichnete Richtungen. Mathematisch drückt sich dies auch im Gleichungssystem (21) aus. Die Differentialgleichung vierter Ordnung für die mit $\sin 2\,n\,\varphi$ veränderliche Spannungsfunktion $\tilde{\psi}_n$ ist gekoppelt mit den „Nachbarfunktionen" $\tilde{\psi}_{n-1}$ und $\tilde{\psi}_{n+1}$. Diese Kopplung ist um so geringer, je größer der Schalenhalbmesser R ist, im Sonderfall der Scheibe ist sie nicht mehr vorhanden. Für kleine Lochhalbmesser üben daher die Anteile der Nachbarfunktionen keinen grundlegenden Einfluß auf die Gestalt der Lösung für $\tilde{\psi}_n$ aus. Nach den Regeln der Störungsrechnung werden deshalb diese Glieder mit einem Störungsparameter ε multipliziert:

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta^*(\Delta^*\tilde{\psi}_n + \tilde{\psi}_n) + \varepsilon\left(\frac{1}{2}\frac{d^2\tilde{\psi}_{n-1}}{d\zeta^2} - \frac{4\,n-3}{2\,\zeta}\frac{d\tilde{\psi}_{n-1}}{d\zeta} + \frac{2\,n\,(n-1)}{\zeta^2}\tilde{\psi}_{n-1}\right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}\frac{d^2\tilde{\psi}_{n+1}}{d\zeta^2} + \frac{4\,n+3}{2\,\zeta}\frac{d\tilde{\psi}_{n+1}}{d\zeta} + \frac{2\,n\,(n+1)}{\zeta^2}\tilde{\psi}_{n+1}\right) = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \\
&\tilde{\psi}_0 = 0\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

Für $\varepsilon = 1$ geht (27) in das ursprüngliche Differentialgleichungssystem über. Für $\varepsilon = 0$ entkoppelt sich das System, und die hierfür zu ermittelnde erste Näherungslösung wird um so besser mit der wirklichen Lösung übereinstimmen je kleiner $|\zeta|$ ist.

Die Spannungsfunktion $\tilde{\psi}$ wird nun in eine Potenzreihe nach ε entwickelt. Für jedes $\tilde{\psi}_n$ gilt dann

$$\tilde{\psi}_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^\nu\, \tilde{\psi}_n^{(\nu)}\,. \qquad (28)$$

Dabei soll $\tilde{\psi}_n^{(0)}$ die Randbedingungen (26) erfüllen. Die $\tilde{\psi}_n^{(\nu)}$ für $\nu > 0$ dürfen also nur noch die zugehörigen homogenen Randbedingungen befriedigen. Auch die Schnittgrößen, Verzerrungen und Verschiebungen lassen sich in dieser Reihenform darstellen.

Wird (28) in das Differentialgleichungssystem (27) eingesetzt und ein Koeffizientenvergleich für gleiche Potenzen von ε vorgenommen, dann ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta^*(\Delta^*\tilde{\psi}_n^{(\nu)} + \tilde{\psi}_n^{(\nu)}) = -\frac{1}{2}\frac{d^2\tilde{\psi}_{n-1}^{(\nu-1)}}{d\zeta^2} + \frac{4\,n-3}{2\,\zeta}\frac{d\tilde{\psi}_{n-1}^{(\nu-1)}}{d\zeta} - \frac{2\,n\,(n-1)}{\zeta^2}\tilde{\psi}_{n-1}^{(\nu-1)} \\
&\quad - \frac{1}{2}\frac{d^2\tilde{\psi}_{n+1}^{(\nu-1)}}{d\zeta^2} - \frac{4\,n+3}{2\,\zeta}\frac{d\tilde{\psi}_{n+1}^{(\nu-1)}}{d\zeta} - \frac{2\,n\,(n+1)}{\zeta^2}\tilde{\psi}_{n+1}^{(\nu-1)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),\ (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \\
&\tilde{\psi}_0^{(\nu)} = 0\,, \qquad \tilde{\psi}_n^{(-1)} = 0\,.
\end{aligned}\right\} \qquad (29)$$

In dieser Differentialgleichung sind $\tilde{\psi}_{n-1}^{(\nu-1)}$ und $\tilde{\psi}_{n+1}^{(\nu-1)}$ bekannte Funktionen. Die vollständige Lösung für $\tilde{\psi}_n^{(\nu)}$ setzt sich somit aus einer Partikularlösung $\tilde{\psi}_{np}^{(\nu)}$ und der Lösung der homogenen Differentialgleichung zusammen. Sie läßt sich mittels *Bessel*scher und *Hankel*scher Zylinder-

funktionen erster Art in geschlossener Form angeben. Werden mit $a^{(\nu)}_{n,n}$, $b^{(\nu)}_{n,n}$, $c^{(\nu)}_{n,0}$ und $d^{(\nu)}_{n,0}$ willkürliche Integrationskonstanten bezeichnet, so ist

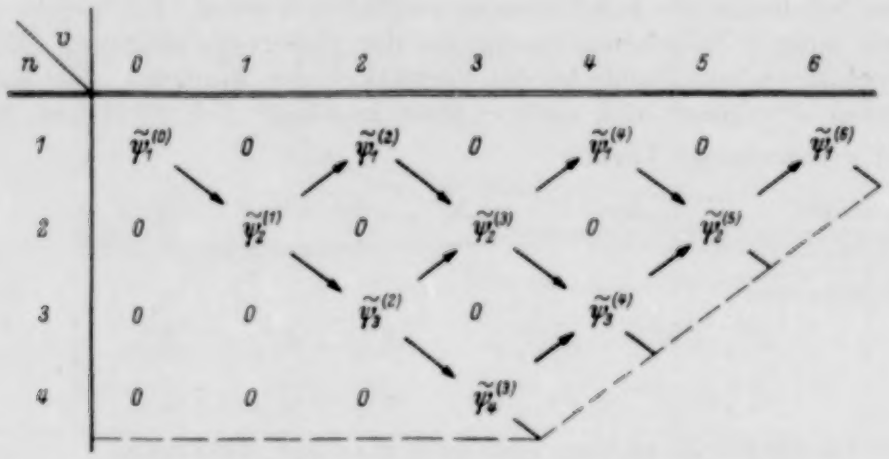
$$\tilde{\psi}^{(\nu)}_n = a^{(\nu)}_{n,n}\,\zeta^{2n} + b^{(\nu)}_{n,n}\,\frac{1}{\zeta^{2n}} + c^{(\nu)}_{n,0}\,J_{2n}(\zeta) + d^{(\nu)}_{n,0}\,H^{(1)}_{2n}(\zeta) + \tilde{\psi}^{(\nu)}_{n_P}. \tag{30}$$

Da die Schnittgrößen mit wachsendem Argument abklingen müssen, ist

$$a^{(\nu)}_{n,n} = c^{(\nu)}_{n,0} = 0\,. \tag{31}$$

Die beiden restlichen komplexen Integrationskonstanten gestatten, die vier Randbedingungen (26) zu erfüllen.

Bei Kenntnis der jeweiligen Partikularlösung lassen sich die Funktionen $\tilde{\psi}^{(\nu)}_n$ aus der Differentialgleichung (29) sukzessiv berechnen. Da $\tilde{\psi}^{(0)}_{n_P} = 0$ ist, und die Randbedingungen (26) für $n > 1$ homogen sind, ergibt sich für den Rechengang das folgende Schema, wobei die identisch verschwindenden Funktionen nicht aufgeführt sind.



Der Ansatz (28) liefert in entsprechender Weise für das Gleichungssystem (23)

$$\left.\begin{aligned} \Delta^*\Omega^{(\nu)}_n + \Omega^{(\nu)}_n &= -\frac{1}{2}\,\Omega^{(\nu-1)}_{n-1} + (2n-1)\,\zeta^{-2n}\int \zeta^{2n-1}\,\Omega^{(\nu-1)}_{n-1}\,d\zeta \\ &\quad -\frac{1}{2}\,\Omega^{(\nu-1)}_{n+1} - (2n+1)\,\zeta^{2n}\int \zeta^{-2n-1}\,\Omega^{(\nu-1)}_{n+1}\,d\zeta \quad (n=1,2,3,\ldots),\ (\nu=0,1,2,\ldots), \\ \Omega^{(\nu)}_0 &\equiv 0\,, \qquad\qquad \Omega^{(-1)}_n \equiv 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

Als Lösung dieser Differentialgleichung ergibt sich

$$\Omega^{(\nu)}_n = s^{(\nu)}_{n,0}\,H^{(1)}_{2n}(\zeta) + \Omega^{(\nu)}_{n_P}, \tag{33}$$

wobei nur der abklingende Lösungsanteil berücksichtigt ist und $\Omega^{(\nu)}_{n_P}$ wieder eine Partikularlösung bezeichnet; $s_{n,0}$ ist eine komplexe Integrationskonstante.

Die Partikularlösungen der Gleichungen (30) und (33) lassen sich ebenfalls in geschlossener Form angeben. Das Ergebnis sei hier vorweggenommen. Es wird

$$\tilde{\psi}^{(\nu)}_n = \sum_{p=1}^{n} b^{(\nu)}_{n,p}\,\frac{1}{\zeta^{2p}} + \sum_{p=0}^{\nu} d^{(\nu)}_{n,p}\,\zeta^p\,H^{(1)}_{2n-p}(\zeta), \tag{34a}$$

$$\Omega^{(\nu)}_n = \sum_{p=2}^{n} r^{(\nu)}_{n,p}\,\frac{1}{\zeta^{2p}} + \sum_{p=0}^{\nu} s^{(\nu)}_{n,p}\,\zeta^p\,H^{(1)}_{2n-p}(\zeta)\,. \tag{34b}$$

Die Randbedingungen für $\xi \to \infty$ sind erfüllt, da

$$\lim_{\xi\to\infty} (\xi\sqrt{i})^p\,H^{(1)}_{2n-p}(+\xi\sqrt{i}) = 0\,. \tag{35}$$

Zwischen den Koeffizienten der Gleichungen (34a) und (34b) bestehen die Beziehungen

$$r^{(\nu)}_{n,p} = -4\,(n+p-1)\,(n-p+1)\,b^{(\nu)}_{n,p-1}\,, \tag{36a}$$

$$s^{(\nu)}_{n,p} = -d^{(\nu)}_{n,p} - 2\,(p+1)\,d^{(\nu)}_{n,p+1}\,. \tag{36b}$$

Dabei ist

$$\left.\begin{aligned} &b^{(\nu)}_{0,p} = r^{(\nu)}_{0,p} = d^{(\nu)}_{0,p} = s^{(\nu)}_{0,p} = 0\,, \\ &b^{(\nu)}_{n,p} = 0 \qquad \text{für} \quad p < 1 \quad \text{und} \quad p > n\,, \\ &r^{(\nu)}_{n,p} = 0 \qquad \text{für} \quad p < 2 \quad \text{und} \quad p > n\,, \\ &d^{(\nu)}_{n,p} = s^{(\nu)}_{n,p} = 0 \quad \text{für} \quad p < 0 \quad \text{und} \quad p > \nu\,; \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

$b^{(\nu)}_{n,n}$ und $d^{(\nu)}_{n,0}$ sind als Integrationskonstanten frei verfügbar. Die übrigen Koeffizienten ergeben sich aus den Funktionen $\tilde{\varphi}^{(\nu-1)}_{n-1}$ und $\tilde{\varphi}^{(\nu-1)}_{n+1}$, bzw. $\Omega^{(\nu-1)}_{n-1}$ und $\Omega^{(\nu-1)}_{n+1}$ zu

$$b^{(\nu)}_{n,p} = 4\,(n-p+1)\,(n+p-1)\,b^{(\nu)}_{n,p-1} + \frac{n+p-1}{2\,(n-p)}\,b^{(\nu-1)}_{n-1,p} + \frac{n-p+1}{2\,(n+p)}\,b^{(\nu-1)}_{n+1,p}\,, \tag{38a}$$

$$s^{(\nu)}_{n,p} = \frac{1}{4\,p}\,(d^{(\nu-1)}_{n-1,p-1} - s^{(\nu-1)}_{n+1,p-1}) - \frac{1}{2}\,s^{(\nu-1)}_{n+1,p}\,. \tag{38b}$$

Die Formeln (36) folgen aus einem Koeffizientenvergleich, wenn (34) in die Funktionalbeziehung (22) eingesetzt wird. Die Gleichung (38a) läßt sich ebenfalls leicht beweisen, wenn (34a) in (29) eingesetzt und hier wiederum die Koeffizienten verglichen werden. Entsprechend erhält man die Formel (38b) nach einiger Zwischenrechnung aus der Differentialgleichung (32), wenn dort die Lösung (34b) eingeführt wird. Damit ist die Richtigkeit der Ausdrücke (34) nachgewiesen.

Die Koeffizienten $d^{(\nu)}_{n,p}$ lassen sich auch explizit angeben. Aus (36b) und (38b) folgt die besonders für $n = 1$ zweckmäßige Formel

$$d^{(\nu)}_{n,p} = +\frac{1}{4\,p}\,s^{(\nu-1)}_{n+1,p-1} - \sum_{t=-1}^{\infty} (-2)^{t-1}\,\frac{(p+t)!}{p!}\,d^{(\nu-1)}_{n-1,p+t}\,. \tag{39}$$

Werden die Konstanten

$$\left.\begin{aligned} b^{(\nu)}_{n,p} &= \bar{b}^{(\nu)}_{n,p} + i\,\hat{b}^{(\nu)}_{n,p}\,, \qquad & d^{(\nu)}_{n,p} &= \bar{d}^{(\nu)}_{n,p} + i\,\hat{d}^{(\nu)}_{n,p}\,, \\ r^{(\nu)}_{n,p} &= \bar{r}^{(\nu)}_{n,p} + i\,\hat{r}^{(\nu)}_{n,p}\,, \qquad & s^{(\nu)}_{n,p} &= \bar{s}^{(\nu)}_{n,p} + i\,\hat{s}^{(\nu)}_{n,p} \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

in ihre Real- und Imaginärteile zerlegt, und setzt man zur Abkürzung

$$\Re\mathrm{e}\,[\zeta^p\,H^{(1)}_{2n-p}(\zeta)] = \bar{Z}_{n,p}(\xi)\,, \qquad \Im\mathrm{m}\,[\zeta^p\,H^{(1)}_{2n-p}(\zeta)] = \hat{Z}_{n,p}(\xi)\,, \tag{41}$$

so folgt aus (34) mit (6) und (11)

$$w^{(\nu)}_n = \sum_p \left[\left(+\bar{b}^{(\nu)}_{n,p}\cos\frac{p\pi}{2} + \hat{b}^{(\nu)}_{n,p}\sin\frac{p\pi}{2}\right)\frac{1}{\xi^{2p}} + \bar{d}^{(\nu)}_{n,p}\,\bar{Z}_{n,p}(\xi) - \hat{d}^{(\nu)}_{n,p}\,\hat{Z}_{n,p}(\xi)\right], \tag{42a}$$

$$\varphi^{(\nu)}_n = \frac{1}{\varkappa}\sum_p \left[\left(-\bar{b}^{(\nu)}_{n,p}\sin\frac{p\pi}{2} + \hat{b}^{(\nu)}_{n,p}\cos\frac{p\pi}{2}\right)\frac{1}{\xi^{2p}} + \bar{d}^{(\nu)}_{n,p}\,\hat{Z}_{n,p}(\xi) + \hat{d}^{(\nu)}_{n,p}\,\bar{Z}_{n,p}(\xi)\right], \tag{42b}$$

$$N^{(\nu)}_n = \frac{E\,t}{2\,R}\sum_p \left[\left(+\bar{r}^{(\nu)}_{n,p}\cos\frac{p\pi}{2} + \hat{r}^{(\nu)}_{n,p}\sin\frac{p\pi}{2}\right)\frac{1}{\xi^{2p}} + \bar{s}^{(\nu)}_{n,p}\,\bar{Z}_{n,p}(\xi) - \hat{s}^{(\nu)}_{n,p}\,\hat{Z}_{n,p}(\xi)\right], \tag{42c}$$

$$M^{(\nu)}_n = \frac{1+\mu}{2\,R\,\varkappa}\sum_p \left[\left(-\bar{r}^{(\nu)}_{n,p}\sin\frac{p\pi}{2} + \hat{r}^{(\nu)}_{n,p}\cos\frac{p\pi}{2}\right)\frac{1}{\xi^{2p}} + \bar{s}^{(\nu)}_{n,p}\,\hat{Z}_{n,p}(\xi) + \hat{s}^{(\nu)}_{n,p}\,\bar{Z}_{n,p}(\xi)\right]. \tag{42d}$$

Die Ausdrücke (41) lassen sich aus den Funktionswerten der *Hankel*schen Funktionen nullter und erster Ordnung vom Argument $\xi\sqrt{i}$ unter Berücksichtigung der Funktionalbeziehungen der Zylinderfunktionen berechnen.

Die Randbedingungen (26) sind so gewählt, daß sich die vier Gleichungen weitgehend entkoppeln, wenn die Ausdrücke (42a) und (42b) eingesetzt werden.

d) Konvergenz. Ein strenger Konvergenzbeweis der Störungsrechnung dürfte nicht einfach sein. Im Rahmen dieser Arbeit wird daher die Konvergenz an Hand von Zahlenbeispielen nachgewiesen.

Abb. 4 zeigt den Verlauf der Normalkraftsumme $N^{(\nu)}_1$ für verschiedene Näherungsschritte bei einem Lochhalbmesser $\xi_0 = 3{,}81$. Wie zu erwarten war, ist die Konvergenz am Lochrand besonders gut und nimmt für wachsendes ξ ab. Ein ähnliches Verhalten wurde auch für andere Schnittgrößen nachgewiesen.

Im allgemeinen wird es zu mühsam sein, den Verlauf der Zustandsgrößen bei jedem Rechnungsschritt zu ermitteln. Einen brauchbaren Anhalt für die Konvergenz geben jedoch bereits die Längskraft oder das Biegemoment am Lochrand, die sich aus (42c) und (42d) leicht berechnen lassen, da

$$n^{(\nu)}_{\varphi_n} = N^{(\nu)}_n \quad \text{und} \quad m^{(\nu)}_{\varphi_n} = -M^{(\nu)}_n \quad \text{für} \quad \xi = \xi_0\,. \tag{43}$$

Das Ergebnis einer solchen Rechnung ist in Tabelle 1 für fünf verschiedene Werte ξ_0 angegeben. Dabei wird die gute Konvergenz des Verfahrens bestätigt. Bei kleinen Löchern kann die Störungsrechnung somit bereits nach wenigen Schritten abgebrochen werden.

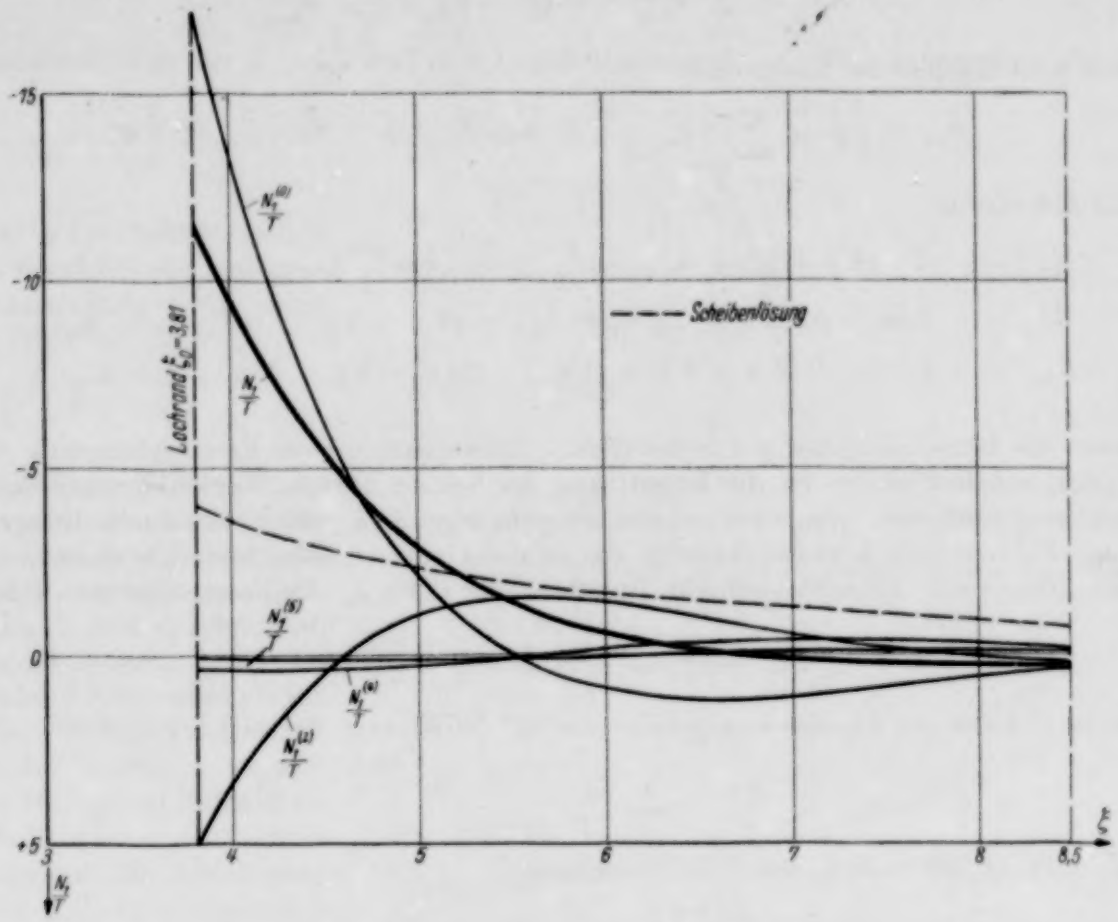


Abb. 4. Verlauf der Funktionen $\frac{N_1^{(\nu)}}{T}$ ($\mu = 0{,}3$).

Tabelle 1. *Längskräfte am Lochrand* ($\mu = 0{,}3$).

n	ξ_0	$n_{\varphi_n}^{(\nu)} \cdot \frac{1}{T}$ für $\xi = \xi_0$						
		$\nu = 0$	$\nu = 1$	$\nu = 2$	$\nu = 3$	$\nu = 4$	$\nu = 5$	$\nu = 6$
1	0,457	−4,310		+0,010		0,000		0,000
	0,914	−5,124		+0,084		+0,004		+0,001
	1,904	−8,053	0	+0,744	0	+0,047	0	+0,011
	2,740	−11,488		+2,069		+0,143		+0,041
	3,810	−17,007		+5,021		+0,301		+0,115
2	0,457		+0,016		−0,001		0,000	
	0,914		+0,150		−0,009		−0,001	
	1,904	0	+1,383	0	−0,176	0	−0,019	0
	2,740		+3,848		−0,713		−0,101	
	3,810		+9,227		−2,321		−0,386	
3	0,457			0,000		0,000		
	0,914			−0,001		0,000		
	1,904	0	0	0,000	0	−0,005	0	
	2,740			+0,036		−0,039		
	3,810			+0,079		−0,176		
4	0,457				0,000			
	0,914				0,000			
	1,904	0	0	0	0,000	0		
	2,740				+0,005			
	3,810				+0,029			

e) Spannungs- und Formänderungszustand. Nach Abschluß der Störungsrechnung lassen sich die Schnittgrößen aus (7) und (42) ermitteln. Mit

$$b_{n,p} = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n,p}^{(\nu)} \qquad \text{und} \qquad d_{n,p} = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_{n,p}^{(\nu)}$$

ergibt sich zum Beispiel die Längskraft

$$\tilde{n}_{\varphi n} = \frac{E\,t}{2\,R}\,\frac{1}{\xi^2} \sum_{p} \left[A_{n,p}\,\frac{1}{\xi^{2p}} + \bar{B}_{n,p}\,\hat{Z}_{n,p}(\xi) + \hat{B}_{n,p}\,\bar{Z}_{n,p}(\xi) \right], \tag{44}$$

wobei zur Abkürzung

$$\begin{aligned} A_{n,p} &= +2\,p\,(2\,p+1)\left(-\bar{b}_{n,p}\,\sin\frac{p\,\pi}{2} + \hat{b}_{n,p}\cos\frac{p\,\pi}{2}\right), \\ \bar{B}_{n,p} &= +2\,(n-p)\,(2\,n-2\,p+1)\,\bar{d}_{n,p} - (4\,n-4\,p+3)\,\bar{d}_{n,p-1} + \bar{d}_{n,p-2}\,, \\ \hat{B}_{n,p} &= +2\,(n-p)\,(2\,n-2\,p+1)\,\hat{d}_{n,p} - (4\,n-4\,p+3)\,\hat{d}_{n,p-1} + \hat{d}_{n,p-2} \end{aligned}$$

gesetzt ist.

Während die Berechnung der zur Schalenmittelfläche senkrechten Verschiebungen w unmittelbar aus (42a) möglich ist, so ist die Ermittlung der beiden übrigen Verschiebungskomponenten wesentlich umständlicher. Zunächst scheint es naheliegend, $\tilde{u}_n$ aus (24a) durch Integration zu bestimmen. Dies ist jedoch unzweckmäßig, da die dann auftretenden Integrale nicht in einfacher Form darstellbar sind. Es wird vielmehr aus (24b) und (24c) $\tilde{u}_n$ eliminiert, und man erhält

$$\tilde{v} = \frac{1}{\xi^{4n^2}}\,\frac{\xi}{\alpha} \int \xi^{4n^2-1} \left[\tilde{\gamma}_{\varrho\varphi n} - 2\,n\,\tilde{\varepsilon}_{\varphi n} + \frac{1}{R}\left(w_n + \frac{n+1}{2}\,w_{n-1} + \frac{n-1}{2}\,w_{n+1} \right) \right] d\,\xi\,. \tag{45}$$

Dieses Integral kann geschlossen angegeben werden. So ist zum Beispiel für $n = 0$

$$\tilde{v}_0 = \frac{1}{\alpha\,R}\,\frac{1}{\xi} \left\{ \frac{1}{2}\,\hat{b}_{1,1} + \sum_{p} \left[\bar{d}_{1,p-1}\,\hat{Z}_{1,p}(\xi) + \hat{d}_{1,p-1}\,\bar{Z}_{1,p}(\xi) \right] \right\}. \tag{46}$$

Ist $\tilde{v}_n$ ermittelt, so läßt sich $\tilde{u}_n$ aus (24b) berechnen:

$$\tilde{u}_n = \frac{\xi}{\alpha} \left[-\tilde{\varepsilon}_{\varphi n} + \frac{2\,n\,\alpha}{\xi}\,\tilde{v}_n - \frac{1}{2\,R}\left(w_n + \frac{1}{2}\,w_{n-1} + \frac{1}{2}\,w_{n+1} \right) \right]. \tag{47}$$

Schließlich liefert (24a) eine Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung.

6. Geschlossene Lösung für sehr kleine Lochdurchmesser. Im Bereich der Randstörung sei

$$\xi^2 \ll 1; \tag{48a}$$

nach (2) und (4) entspricht dies

$$\frac{\varrho}{R} \ll \frac{t}{\varrho}\,. \tag{48b}$$

Die Störungsrechnung kann dann auf den ersten Rechnungsschritt beschränkt werden, also

$$\tilde{\psi} \approx \tilde{\psi}_1^{(0)} \sin 2\,\varphi\,, \tag{49}$$

und die *Hankel*schen Funktionen lassen sich durch die ersten Glieder ihrer Potenzreihenentwicklung ersetzen. Nach einiger Zwischenrechnung erhält man für die Schnittgrößen und Verschiebungen am Lochrand

$$\left.\begin{aligned} n_{\varphi(\xi=\xi_0)} &\approx -\left(4 + \frac{\pi\,\xi_0^2}{2}\right) T \sin 2\,\varphi\,, \\ m_{\varphi(\xi=\xi_0)} &\approx +\frac{1+\mu}{3+\mu}\,\frac{r^2}{R}\left[1 - (1-\mu)\,\ln\frac{\gamma\,\xi_0}{2}\right] T \sin 2\,\varphi\,, \\ u_{(\xi=\xi_0)} &\approx +\frac{r}{E\,t}\left(4 + \frac{\pi\,\xi_0^2}{2}\right) T \sin 2\,\varphi\,, \\ v_{(\xi=\xi_0)} &\approx +\frac{r}{E\,t}\left[1 + \mu - \frac{\pi\,\xi_0^2}{4} + \left(4 + \frac{\pi\,\xi_0^2}{2}\right)\cos 2\,\varphi\right] T\,, \\ w_{(\xi=\xi_0)} &= +\frac{2\,R}{E\,t}\,\xi_0^4\,(\cdots)\,T \sin 2\,\varphi\,. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Hierbei bezeichnet $\ln\gamma = 0{,}577216$ die *Euler*sche Konstante. Ist $\xi_0 = 0$ und $R = \infty$, so geht (50) in die Scheibenlösung über. Im übrigen entsprechen die Gleichungen in ihrem Aufbau den von *A. I. Lurje* angegebenen Formeln für die auf axialen Zug beanspruchte Zylinderschale.

7. Vergleich der Spannungszustände bei Schale und Scheibe. Abb. 5 zeigt den Verlauf der Hauptspannung

$$\sigma_{II} = \frac{1}{t}\left(\frac{n_\varrho + n_\varphi}{2} - \sqrt{\frac{(n_\varrho - n_\varphi)^2}{4} + n_{\varrho\varphi}^2}\right),$$

der Schalenmittelfläche für $\mu = 0{,}3$ und den Lochhalbmesser $\xi_0 = 1{,}904$, bezogen auf die Schubspannung

$$\tau_0 = \frac{T}{t}$$

der ungeschwächten Schale. Abb. 6 zeigt zum Vergleich die entsprechende Darstellung für eine Scheibe. Dabei ist

$$\eta = \frac{\varrho}{L} \quad \text{mit} \quad \eta_0 = \frac{r}{L}$$

als dimensionslose Veränderliche eingeführt, wobei L eine beliebig wählbare Länge, zum Beispiel die Längeneinheit, bezeichnet.

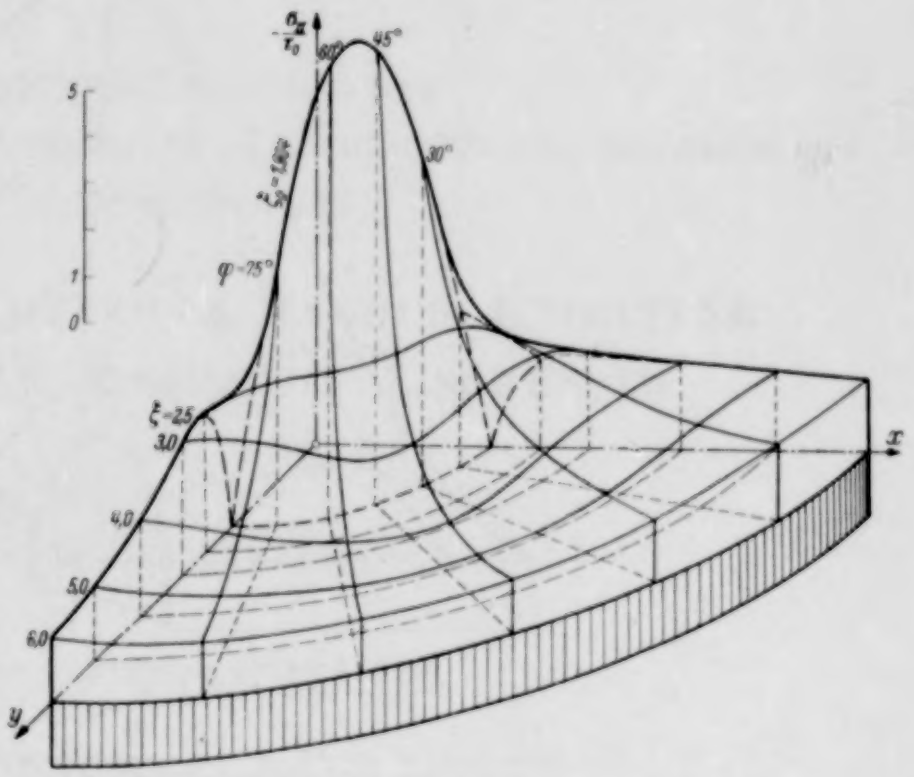


Abb. 5. Hauptspannung $\frac{\sigma_{II}}{\tau_0}$ der Schalenmittelfläche ($\mu = 0{,}3$).

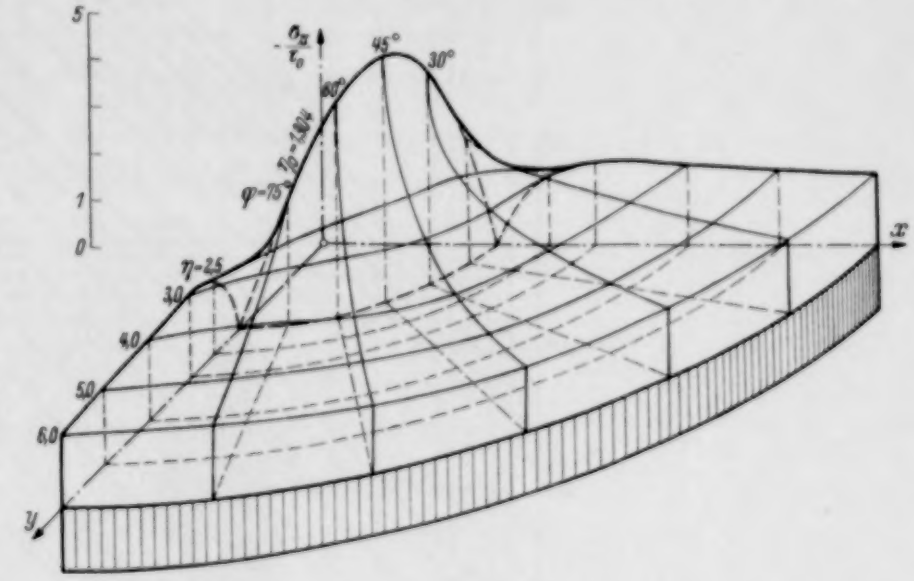


Abb. 6. Hauptspannung $\frac{\sigma_{II}}{\tau_0}$ der Scheibe.

Aus Abb. 5 und 6 folgt, daß die Lochrandspannungen bei der Schale erheblich höher sind als bei der Scheibe. Während die Randstörungen der Scheibe asymptotisch gegen Null gehen, klingen sie bei der Schale in Form gedämpfter Schwingungen ab. Die Abklingung ist dabei in Lochnähe wesentlich größer als bei der Scheibe. In weiterer Entfernung vom Lochrand sind jedoch immer noch geringfügige Spannungen vorhanden, die örtlich sogar über den entsprechenden Werten der Scheibe liegen können. Diese schwache Dämpfung wurde von *G. Sonntag*[1] bei ähnlich belasteten Zylinderschalen ebenfalls festgestellt.

8. Maximale Lochrandspannungen bei beliebigen Schalenabmessungen. Abb. 7 gibt den Verlauf der Normalkräfte n_φ am Lochrand für die Halbmesser $\xi_0 \leqq 4{,}0$ an. Die Koordinate $\xi_0 = 0$ entspricht der Scheibenlösung. Dabei ist beachtenswert, daß für größere ξ_0 die Stelle der maximalen Längskraft sich immer stärker zur y-Achse hin verlagert. Die Spannungen werden also von der in ξ-Richtung stärkeren Krümmung angezogen, was auch anschaulich unmittelbar einzusehen ist.

Die Spannungsspitze in der Schalenleibung kann mit Hilfe von Abb. 8 unmittelbar angegeben werden, wobei der Einfluß der Biegemomente berücksichtigt wird.

9. Zusammenfassung. Das Randstörungsproblem der tordierten Zylinderschale mit kreisförmigem Loch wird mit Hilfe der Störungsrechnung gelöst. Die Lösungen konvergieren in dem

[1] *G. Sonntag*, Z. angew. Math. Mech. 36 (1956), S. 289.

für praktische Zwecke wesentlichen Parameterbereich sehr gut. Es wird das bereits empirisch gefundene Ergebnis bestätigt, wonach die Randspannungen bei der Schale stets größer sind als bei der Scheibe. Diese Spannungserhöhung rührt nicht nur von den zusätzlich auftretenden Biegemomenten her, sondern beruht auch auf einem Anwachsen der Längskräfte. Die Störungen klingen in Form gedämpfter Schwingungen ab, die sich mathematisch durch negative Potenzreihen und

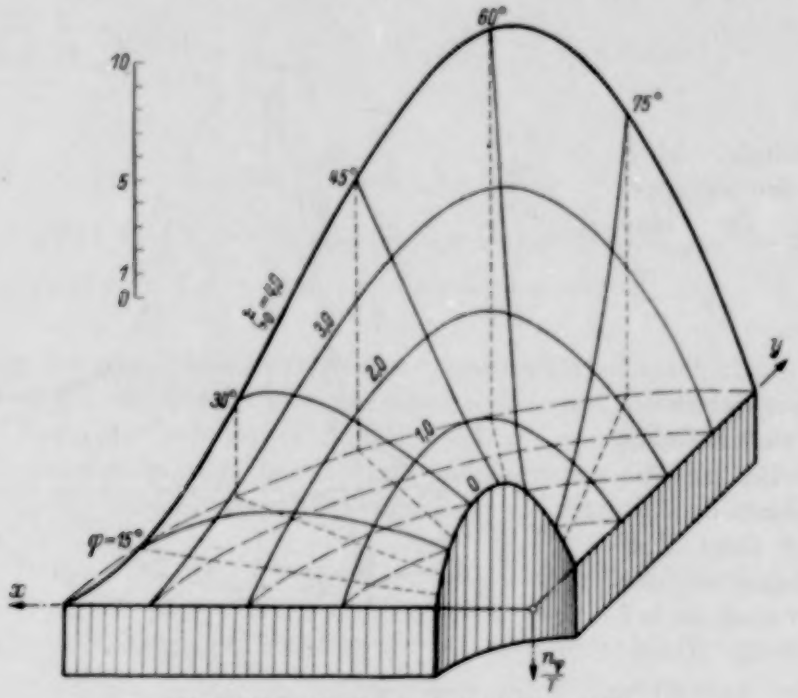


Abb. 7. Normalkräfte am Lochrand ($\mu = 0{,}3$).

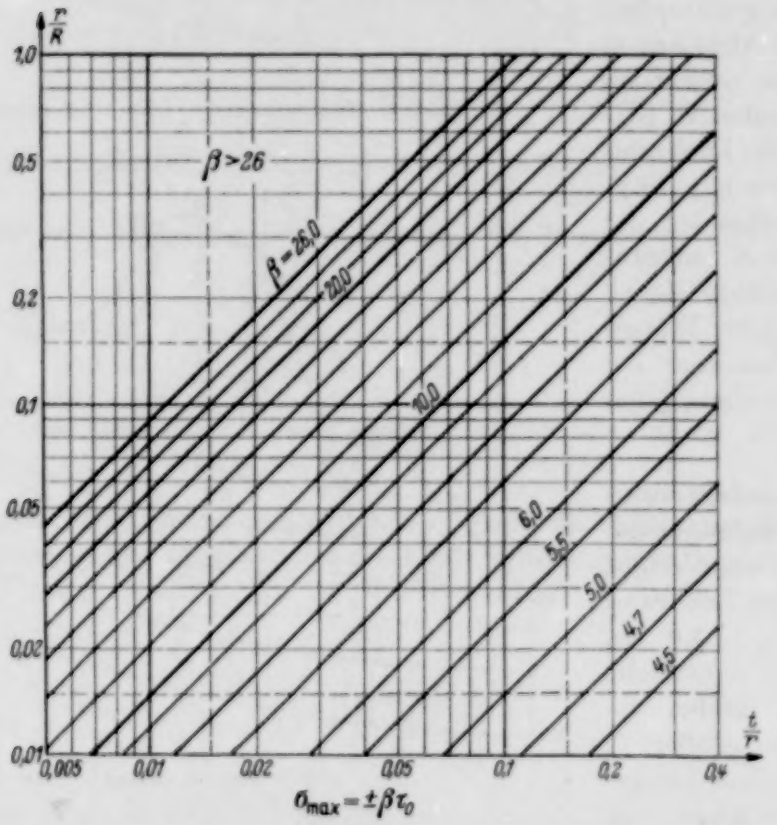


Abb. 8. Spannungserhöhung am Lochrand ($\mu = 0{,}3$).

Reihen *Hankel*scher Zylinderfunktionen ausdrücken lassen. Die Schnittgrößen und Verformungen des Lochrandes werden für sehr kleine Lochdurchmesser in geschlossener Form angegeben. Für beliebige Schalenabmessungen kann die Spannungserhöhung am Lochrand in einem Diagramm abgelesen werden.

(Eingegangen am 8. März 1958.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Dieter Withum*, Duisburg-Huckingen, Am Heidberg 27.